

N° D'ORDRE :

60

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LYON

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. Marie-Auguste MOREL

Ingenieur,

Ancien Elève de l'École des Ponts et Chaussées,

Ancien Ingenieur du Service de l'Artillerie aux Usines du Creusot,

Professeur de Mathématiques Spéciales.

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ETUDE BALISTIQUE DES CANONS DE GROS CALIBRE
ET A TRES LONGUES PORTÉES.

2^e THÈSE. — DE L'ENERGETIQUE D'UN NOUVEAU TYPE DE PROJECTILE HÉTÉROGÈNE.

Soutenues le

devant la Commission d'Examen.

MM. LE VAVASSEUR, *Président.*

DULAC,

MASCART,

GOUY,

} *Examineurs.*

LYON

A. MAISONNEUVE, IMPRIMEUR

41, Passage de l'Hôtel-Dieu et Rue Childebert, 41

1919

N^o D'ORDRE :

60

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LYON

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. Marie-Auguste MOREL

Ingénieur,

Ancien Elève de l'Ecole des Ponts et Chaussées,

Ancien Ingénieur du Service de l'Artillerie aux Usines du Creusot,

Professeur de Mathématiques Spéciales.

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE BALISTIQUE DES CANONS DE GROS CALIBRE
ET A TRÈS LONGUES PORTÉES.

2^e THÈSE. — DE L'ÉNERGÉTIQUE D'UN NOUVEAU TYPE DE PROJECTILE HÉTÉROGÈNE.

Soutenues le

devant la Commission d'Examen.

MM. LE VAVASSEUR, *Président.*

DULAC,

MASCART,

GOUY,

} *Examineurs.*

LYON

A. MAISONNEUVE, IMPRIMEUR

41, Passage de l'Hôtel-Dieu et Rue Childebert, 41

1919

UNIVERSITÉ DE LYON

FACULTÉ DES SCIENCES

DOYEN

M. DEPÉRET, , I. . Membre de l'Institut.

ASSESSEUR

M. VIGNON (LÉO), , I. .

PROFESSEUR HONORAIRE

M. VESSIOT, I. .

MM.

BARBIER, O.  I. 
Correspondant de l'Institut.
 GOUY, , I. 
Membre de l'Institut.
 GÉRARD, , I. 
 DUBOIS, , I. 
 DEPÉRET, , I. 
Membre de l'Institut.
 KÆHLER, , I. 
 OFFRET, I. 
 VIGNON (LÉO), , I. 
 LE VAVASSEUR, I. 
 DULAC, , I. 
 MASCART.
 X.

PROFESSEURS

Chimie générale.
 Physique.
 Botanique.
 Physiologie générale et comparée.
 Géologie.
 Zoologie.
 Minéralogie théorique et appliquée.
 Chimie appliquée à l'industrie et à l'agriculture.
 Calcul différentiel et intégral.
 Mathématiques pures.
 Astronomie physique.
 Mathématiques appliquées.

MM.

VAUTHIER, I. 
 RIGOLLOT, I. 
 COUTURIER, I. 
 VANEY, I. 

PROFESSEURS ADJOINTS

Physique.
 Physique industrielle.
 Chimie appliquée.
 Zoologie.

MAITRES DE CONFERENCES ET CHARGÉS DE COURS COMPLEMENTAIRES

MM.

RAY, I. 
 THOVERT, I. 
 LOCQUIN, A. 
 MEUNIER, , I. 
 RICHE, I. 
 COUVREUR, I. 
 X.
 BONNET, A. 
 ROMAN, I. 
 CHIFFLOT, I. 
 WIERNBERGER, A. 
 MAYET, I. 
 GUILLIERMOND, A. 
 PELOSSE

Botanique.
 Physique.
 Chimie générale.
 Technologie chimique.
 Géologie.
 Physiologie.
 Astronomie.
 Zoologie appliquée et Zootechnie.
 Géologie agricole.
 Botanique.
 Mathématiques.
 Anthropologie.
 Botanique agricole.
 Sériciculture.

SECRÉTAIRE

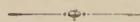
M. CLERE, I. .



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545904_0043

PREMIÈRE THÈSE



Contribution à l'Etude Balistique
des Canons de Gros Calibre et à très Longues Portées



A LA MÉMOIRE

de mon Maître vénéré

CHARLES MÉRAY,

Membre correspondant de l'Institut,
Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Dijon,
qui a bien voulu m'honorer de sa grande amitié.

A

Monsieur RAYMOND LE VAVASSEUR,

Professeur à l'Université de Lyon,
Président.

Monsieur HENRI DULAC,

Professeur à l'Université de Lyon,
Examineur d'Admission à l'Ecole Polytechnique.

Hommage d'affectueuse reconnaissance.

« On peut avoir trois principaux objets dans l'étude de la vérité : l'un, de la découvrir quand on la cherche, l'autre, de la démontrer quand on la possède, le dernier de la discerner d'avec le faux quand on l'examine. »

PASCAL, de l'Esprit Géométrique.

AVANT-PROPOS

La mécanique appliquée est intermédiaire entre la mécanique rationnelle et la mécanique pratique. La première ne considérant que des êtres fictifs, à propriétés précises et simples, admet l'entière rigueur des considérations mathématiques. La seconde s'occupant des corps naturels à propriétés souvent mal définies, peu connues et toujours complexes, s'interdit toute conception théorique et ne relève que de l'expérience.

Entre elles, participant de l'une et de l'autre, utilisant à la fois les enseignements des deux, appliquant les ressources de l'Analyse en même temps que les résultats expérimentaux se place la mécanique appliquée.

Son développement est de date récente et, pour en trouver l'origine, il suffit de remonter à un siècle à peine. Elle apparaît avec la physique mathématique et ces deux sciences, nées au même moment, se constituent simultanément ; leur marche pendant plus de cinquante ans est parallèle et les mémoires de Prony, de Navier, de Poncelet, de Coriolis, de Clapeyron sont contemporains des mémoires de Laplace, de Fourier, d'Ampère, de Poisson, de Cauchy.

Ce n'est point là l'effet du hasard : une raison supérieure préside à ce parallélisme, la mécanique appliquée et la physique mathématique ont plus d'un point commun. Abordant les questions dans le même esprit, usant des mêmes procédés, chacune d'elles met en œuvre les méthodes des mathématiques pures après avoir fait des hypothèses simplificatrices qui en permettent l'application et chacune d'elles en raison même de ces hypothèses doit recourir à l'expérience pour vérifier les résultats obtenus.

La mécanique appliquée trouve d'ailleurs souvent dans la physique mathématique un point de départ et un appui ; elles se rencontrent dans de nombreuses questions et ne se séparent guère nettement que pour les buts proposés.

La physique mathématique a pour objectif dernier la recherche de la constitution intime des corps et des lois qui la régissent ; la mécanique appliquée, au contraire, laisse systématiquement de côté cette constitution et donne simplement aux praticiens des règles rationnelles pour l'édification de leurs constructions ou l'agencement de leurs machines.

Cette différence de but exprime la différence d'éclat de ces deux sciences.

La physique mathématique s'attache à des questions d'un caractère élevé ; la mécanique appliquée traite des sujets plus modestes, aussi ardues peut-être mais qui n'ont pas le prestige des grands problèmes de la philosophie naturelle.

C'est une science difficile, toute de mesure, capable de fournir, en des mains habiles, de précieux résultats; mais exigeant de ceux qui s'y consacrent des qualités toutes spéciales.

Il ne suffit pas, en effet, de posséder toutes les connaissances nécessaires pour établir les équations, les transformer, les discuter ou les résoudre, il ne leur suffit pas d'être en mesure de diriger les expériences pour obtenir des coefficients, apprécier des grandeurs, il leur faut encore distinguer au préalable dans chaque phénomène, le point important et la voie à suivre; ne jamais perdre de vue, au milieu de la complication des calculs, le but à atteindre, se rendre compte du champ d'exactitude des formules obtenues, démêler ce qui est négligeable et ce qui ne l'est pas, raisonner juste enfin, tout en ne cessant de calculer avec rigueur (C. R. 17 Novembre 1890).

Ces qualités si rares, plusieurs hommes les ont possédées au plus haut degré. Chaque science appliquée a eu ses maîtres qui ont doté la mécanique de tant de perfectionnements et dont les nombreux et difficiles travaux sont pour leurs élèves autant de modèles de clarté et de rigueur

C'est ainsi que nous citerons les Belanger, les Bresse, les Collignon, les Lévy, les Résal pour la résistance des matériaux, les Bernouilli, les Darcy, les Bazin pour l'hydraulique, les de Bussy, les Pollard pour les constructions navales, les Philipps pour la chronométrie, les Sarrau, les Vieille pour la pyrotechnie.

La balistique elle aussi a été l'objet de travaux très importants entrepris par de véritables savants. Nous aurons maintes fois dans le cours de la présente thèse, l'occasion de citer la plupart d'entre eux. Cette science n'est-elle pas à l'ordre du jour, en cette époque de guerre mondiale et n'occupe-t-elle pas les plus grands esprits scientifiques?

Aussi le choix d'une question de balistique pour sujet de thèse se trouve-t-il justifié, et, si modeste que soit le travail présenté, il peut être utile à l'artillerie moderne, d'autant plus qu'il a trait essentiellement à la question des canons de gros calibre et à très longues portées.

Lyon, le 15 Août 1918.

Histoire sommaire de la Balistique

L'artillerie (ars telorum) est dite Βελοποιία, Βελοποιία et τῶν ὀργάνων φιλοσοφία par l'ingénieur Bilon de la grande époque Alexandrine, comprise entre le temps d'Alexandre et celui d'Auguste. Diodore de Sicile l'appelle τὸ Καταπέλτικόν. Καταπέλτης ou Καταπάλτης est le nom générique des machines de jet, qu'on appelle aussi ἀφετήρια ὅργανα; le projectile est dit βέλος.

L'objet de l'artillerie, professent les anciens auteurs didactiques, est d'atteindre un but donné du plus loin et avec le plus de vigueur possible.

Vitruve déclare sans ambages que les découvertes de l'artillerie sont de nature à garantir l'Etat de tout danger; à lui assurer, en cas de besoin, son salut (praesidia periculi, necessitatem salutis). Avant lui, Héron d'Alexandrie avait donné cette élégante paraphrase de ce vieil adage: "Si vis pacem para bellum,": «De tous les problèmes abordés par les philosophes le plus grand, le plus indispensable à résoudre est celui du maintien de la paix. Jusqu'ici, parmi les maîtres de la science, la question a soulevé et soulève encore une infinité de controverses. Selon moi, de semblables discussions, purement spéculatives, n'ont aucune chance d'aboutir à un résultat quelconque.

«Sur ce terrain pourtant la doctrine a cédé le pas à la mécanique. Par celle-ci les hommes se sont assurés une existence paisible; oui, la mécanique leur en offre des garanties dans la plus humble sphère de son enseignement, je veux dire dans les applications de ce qu'on nomme l'artillerie (Βελοποιία).

«Grâce à l'artillerie, en effet, point d'attaque à redouter en temps de paix, à l'intérieur non plus qu'à l'extérieur; et quand la guerre éclate, rien n'ébranle une sécurité basée sur la science des machines (τῶν ὀργάνων φιλοσοφία). Il faut donc, en tout temps, y apporter tous les soins possibles, y consacrer tous les moyens que suggère la sagesse.»

«Si la paix règne, on la verra certainement fortifiée par l'activité déployée dans les arsenaux, et l'observation de cette activité la perpétuera.»

«En présence d'un appareil de guerre formidable, toute velléité d'émeute sera, d'ailleurs, paralysée. Que l'artillerie, au contraire, soit négligée, la plus petite insurrection, si faible qu'on la suppose, aura bientôt raison de l'Etat pris au dépourvu.»

Les anciens s'accordaient à reconnaître que les principes de l'art qu'on nomme artillerie sont loin de reposer sur les bases d'une science exacte: que la découverte de ses procédés les plus simples ne peut être que le fruit de l'observation unie à la pratique (ex fabrica et ratiocinatione).

Le que l'antiquité disait de l'économie et de la conduite de ses engins névrotiques, chacotiques ou sidérotiques, le moyen-âge l'a dit de son artillerie trébuchante; les modernes l'ont répété de leur artillerie à feu. Ainsi, au cours des travaux qui l'ont conduit à tant d'utiles découvertes, l'illustre Robins déclarait expressément que l'artillerie est avant tout un "art d'expérience". Et après lui: «C'est à la pratique, disait Robert, que doit être attribuée la majeure part des améliorations qui ont été successivement apportées à l'économie des bouches à feu.» Les améliorations n'ont, d'ailleurs, été obtenues qu'à la suite d'une longue série de tâtonnements et l'essai d'une foule de combinaisons très diverses. De tels efforts, persévéramment poursuivis, n'ont cependant pas été suffisants à l'effet de fixer les bases sur lesquelles doivent être établis les vrais principes de l'art. Aussi, vers la fin de sa carrière si bien remplie, Gribeauval faisait-il modestement cette déclaration: «Nous ignorons encore les véritables principes d'après lesquels doivent être réglés l'alliage, le poids, les proportions des bouches à feu.»

D'autre part, les travaux des savants, qui se sont attachés à la recherche d'une solution des problèmes de balistique, n'ont pas toujours conduit le praticien à des résultats qui fussent en harmonie avec les données de l'expérience. Malgré les louables tentatives de ces théoriciens, les connaissances techniques qui sont du domaine de l'artillerie moderne ne forment pas encore un ensemble dont tous les

éléments soient reliés entre eux d'une façon absolument rationnelle.

L'artillerie est un art essentiellement difficile, exigeant de ses adeptes nombre de mérites très divers. Les Grecs désignaient le constructeur d'engins de guerre sous les dénominations de μηχανικός, λογιστής ou βελοποιός; les Latins, sous celles d'architectus et d'artifex.

Les artilleurs de l'antiquité étaient tenus d'avoir autant de théorie que de pratique : « Ceux d'entre eux, dit Vitruve, qui, au mépris de la théorie (sine litteris), ne se sont adonnés qu'à la pratique (manibus exercitati) n'ont pu arriver à conquérir une réputation proportionnée à leurs efforts. Ceux qui croient pouvoir se contenter du raisonnement et des données de la science, c'est une ombre vaine et non la réalité qu'ils s'attachent à poursuivre. Celui qui, pareil au guerrier armé de pied en cap, unit la théorie à la pratique, celui-là seul atteint son but avec autant de succès que de rapidité. »

Passant à l'examen des conditions qui s'imposent au véritable artilleur : « Il doit, poursuit l'illustre architectus de Jules César, il doit être intelligent et travailleur, car l'esprit sans l'application ou l'application sans l'esprit ne peut produire un artilleur complet (perfectum artificem). Il faut qu'il soit lettré (litteratus), habile dessinateur (peritus graphidis), fort en géométrie, en optique, en arithmétique, en histoire. Il est tenu d'avoir fait de la philosophie; d'avoir des notions de médecine, de droit, d'astronomie et même de savoir la musique (musicem autem scire oportet). » Vitruve veut que l'artilleur apprenne la musique pour acquérir ainsi le sentiment de la justesse et de l'harmonie des proportions de ses œuvres (ut canonicam rationem et mathematicam notum habeat).

Les enseigneurs du moyen âge satisfaisaient aux conditions posées par Vitruve. Pendant la Renaissance l'artillerie a fait d'immenses progrès. Du temps de François 1^{er} les gens sérieux comprenaient combien l'artillerie est tenue d'observer de prudence dans sa marche en avant; combien de circonspection au cours de ses essais de perfectionnement. Ils estimaient que les qualités maîtresses de l'artilleur sont le jugement et la sagesse (Lt. Colonel Hennebert - Bouches à feu).

Il est permis de penser que le programme posé, il y a tantôt 2000 ans, par Vitruve est encore aujourd'hui parfaitement en situation. La difficile science de l'artillerie a été l'objet des préoccupations d'un très grand nombre de savants.

Galilée (1590) démontra le premier que dans le vide, la trajectoire d'un projectile est une parabole. Dans ses "Discorsi e dimostrazioni mathematiche intorno a due nuove scienze", on lit l'avertissement très court par lequel débute la seconde partie : « Nous édifions une Science entièrement neuve sur un sujet vieux comme le monde. Rien de plus ancien, en effet, dans la nature, que le mouvement; mais quoi que les philosophes eussent écrit quantité de gros volumes, les plus importantes particularités en étaient restées ignorées. On avait bien remarqué que le mouvement des corps qui tombent naturellement s'accélère; mais dans quelle proportion a lieu cette accélération, cela n'avait pas encore été dit. Personne, en effet, n'a jusqu'ici démontré que les espaces parcourus dans des temps égaux, par un mobile qui tombe, à partir du repos, sont comme les nombres impairs. »

« On avait bien remarqué que les projectiles décrivent des courbes, mais que ces courbes fussent des paraboles, personne ne l'avait encore avancé. Nous démontrerons qu'il en est ainsi et notre travail formera la base d'une science où des esprits plus perspicaces pénétreront encore plus profondément. » Enonçant maintenant ses principales propositions Galilée dit : « Nous avons traité précédemment du mouvement uniforme et du mouvement uniformément accéléré, il va être maintenant question de celui d'un mobile animé d'un double mouvement; l'un uniforme, l'autre uniformément accéléré. Nous disons que ce mouvement est celui des projectiles. Or voici comment j'en constitue la génération (cujus generationem talem constituo). Je conçois par la pensée un mobile lancé sur un plan horizontal toute résistance étant enlevée (omni secluso impedimento), son mouvement resterait perpétuellement

uniforme si le plan était indéfini ; mais si ce plan est terminé, dès que le mobile arrive à la limite, il est soumis à la gravité et au-delà il ajoute à son précédent et indélébile mouvement celui auquel il a dès lors propension par sa propre gravité ; d'où résulte un mouvement composé d'un mouvement uniforme et du mouvement naturellement accéléré.»

Telle est la manière dont Galilée présente ce qu'on a appelé par une double exagération son principe de l'indépendance des effets des forces.

Proposition I. — Un mobile emporté par un mouvement composé d'un mouvement horizontal uniforme et du mouvement naturellement accéléré, décrit dans son parcours une semi-parabole.

Proposition II. — Si un mobile est animé de deux mouvements uniformes l'un horizontal, l'autre vertical, sa vitesse sera, en puissance, égale aux deux vitesses des mouvements primitifs (c'est-à-dire que le carré de la vitesse du mouvement résultant sera égal à la somme des carrés des vitesses des mouvements composants, parce que les deux vitesses sont rectangulaires entre elles).

Proposition III. — Galilée étend le problème précédent au cas de la composition d'un mouvement uniforme horizontal et du mouvement uniformément accéléré.

Comme il ne pouvait donner de noms ni à la vitesse du mouvement uniforme, ni à l'accélération du mouvement uniformément accéléré, il éprouve naturellement une grande difficulté à mettre en rapport les deux mouvements, il tourne cette difficulté de la manière la plus heureuse et avec une merveilleuse entente des conditions concrètes de la question. Voici comment : Il a démontré que la trajectoire du mobile sera une parabole ; mais ni le paramètre de cette parabole, ni l'amplitude du jet, pour une hauteur donnée ne sont encore déterminés ; pour pouvoir maintenant traiter la question d'une façon complète, il définit le mouvement uniforme qui doit être composé avec le mouvement naturellement accéléré, par la hauteur dont un corps pesant devrait tomber pour acquérir une vitesse égale à celle du mouvement uniforme qu'il veut introduire ; de sorte que tous les éléments de la question se trouvent désormais comparables entre eux.

Galilée démontre ensuite que le paramètre de la parabole décrite par le mobile, c'est-à-dire ce que l'on désigne par p dans l'équation : $y^2 = 2px$, est le double de la hauteur dont il vient d'être parlé.

Le problème fondamental de la Balistique a donc été résolu analytiquement et non expérimentalement.

L'étude du mouvement d'un projectile dans un milieu résistant date de l'origine du calcul infinitésimal. Newton et Wallis ont donné les premiers travaux sur ce sujet en 1687. Les recherches de Newton se trouvent dans le second livre des Principes, et celles de Wallis dans les Transactions philosophiques. Deux ans plus tard, Leibnitz publia un Mémoire sur le même sujet dans les Acta eruditorum.

Jean Bernouilli fut provoqué par Keil pour la détermination du mouvement d'un projectile dans un milieu homogène, lorsque la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Il résolut le problème plus général quand la résistance est proportionnelle à une puissance quelconque de la vitesse. Ses recherches furent publiées ainsi que celles de son neveu Nicolas Bernouilli dans les Acta eruditorum (1719 p. 216). Plus tard, Legendre ramena aux quadratures la détermination du mouvement d'un projectile quand la résistance est égale à une constante augmentée d'un terme proportionnel au carré de la vitesse. (Mémoires de l'Académie de Berlin, 1782).

Euler (1753) a donné l'expression finie de la longueur d'un arc de trajectoire en supposant d'après Newton, la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, et il a obtenu les coordonnées des points de la trajectoire en la divisant en petits arcs qu'il assimilait à des segments de droite. Cette idée d'Euler fut acceptée par Jacobi et Grävenitz (1764) ; mais surtout par Otto (1842) qui calcula des tables très étendues. Legendre (1782) a repris la méthode d'Euler en substituant aux segments de droite des arcs de cercle osculateurs. Mais plus tard Didion démontra que ce procédé ne donne pas de résultats plus précis que celui d'Euler. Bashforth (1873) appliquant les idées d'Euler calcula des tables analogues pour le cas de la loi du cube.

Hélie (1884) et à son exemple la Commission de Gêve calculent des trajectoires par arcs successifs, méthode qui, en multipliant convenablement le nombre d'arcs permet d'obtenir les éléments du point de chute avec toute l'approximation désirable, et en tenant compte de la densité variable des couches d'air que traverse le projectile. Dans sa *Méthode des vitesses*, Vattier (1890) emploie pour l'intégration des équations différentielles une règle généralisée de Gauss, et l'applique surtout au calcul détaillé de très grandes trajectoires pour lesquelles la densité de l'air varie.

Enfin François (1765), Lambert (1767), Borda (1772), Tempelhof (1791), Heim (1842), Pfister (1881) et de Saint-Robert ont eu recours aux développements en séries qui donnent l'ordonnée, la vitesse et le temps en fonction de l'abscisse et de la longueur d'arc. Quelques-uns de ces géomètres ont cherché en même temps à rendre les intégrations possibles en modifiant la loi de la résistance de l'air. L'étude de cette loi a été aussi l'objet d'un grand nombre d'expériences faites à différentes époques par Toricelli, Newton, Robins, Hulton, Borda, Thibault, Robert, Morin, Didion, Mach, Rummer, etc. Il convient encore de citer les mémoires de d'Alembert (1744), de Gauss, de Cauchy, de Lagrange, de Poisson, de Heim (1840), de Magnus (1853) et plus récemment de Timmerhans (1861), de Gillion (1861), de Terssen (1861), de Maievs'kij (1870), de Greenhill (1882), de von Wuich (1892), de Fellner (1895), de Zabudskij, de M. le Comte Magnus de Sparre (1911) sur les mouvements secondaires des projectiles et sur l'influence de la rotation de la Terre.

Robert a enfin été conduit à représenter la résistance de l'air par une expression binôme renfermant un terme proportionnel au carré de la vitesse et un autre proportionnel au cube de la même vitesse; mais cette hypothèse conduit à des formules très compliquées. Le général Didion a néanmoins pensé qu'il les rendait usuelles au moyen d'une suite de tables qu'il a pris la peine de calculer. Malheureusement les résultats auxquels conduit cette méthode ne s'accordent pas suffisamment avec l'expérience.

Dans sa thèse de doctorat soutenue en Sorbonne le 28 Novembre 1867, M. Paul Gauthier a étudié le mouvement d'un projectile dans l'atmosphère en supposant la résistance de l'air tout d'abord proportionnelle à la vitesse, puis au cube de la vitesse du projectile.

Des travaux plus récents ont été entrepris par de véritables savants. Parmi ceux qui ont réalisé les plus grands progrès à la Balistique mentionnons Zabudskij (1881), Braccialini (1883), Hojel (1884), Hélie (1884), Mureau (1885), Laurent, Siacchi (1896), Sébert, Picoté, Henry, Gossot, Comte Magnus de Sparre (1899), Ingalls (1900), Charbonnier (1904), de la Llave (1909) et je ne les nomme certainement pas tous.

Des méthodes graphiques ont été aussi proposées pour remplacer les méthodes analytiques. C'est ainsi que Foncellet (1829) construisit la trajectoire, au moyen de plusieurs éléments d'arc de la manière suivante: Si l'on connaît la grandeur et la direction de la vitesse du mobile sur la trajectoire à l'origine du premier arc choisi suffisamment petit, on calcule la nouvelle valeur de la vitesse à l'extrémité de cet arc par le théorème du travail, le rayon de courbure de l'arc s'obtient par le calcul de la composante normale des forces extérieures et ainsi de suite par éléments successifs. Ciaz (1897) construit la trajectoire par des arcs de parabole au moyen des tables de Krupp, qui avait établi (1891) comme complément à ses tables la courbe balistique par des méthodes d'approximation.

Les procédés de M. d'Ocagne pour la représentation graphique des fonctions ont été appliqués par Pesci (1899), Ronca (1899), von Portenschlag-Liedermayer (1900), Garbasso (1903). Moi-même ai publié en 1904, un *Traité de Balistique graphique* avec Abaques résumant les longs travaux que j'ai faits, lorsque j'étais ingénieur au service de l'Artillerie des usines du Creusot. Ces abaques permettent de déterminer par de simples lectures tous les éléments de tir d'un canon quel qu'il soit et pour n'importe quel lieu géographique. Ayant reconnu dès cette époque tout l'intérêt qu'on pouvait tirer de l'augmentation des vitesses initiales, mes tables et abaques sont valables jusqu'à la vitesse initiale de 1500 mètres. Ces grandes vitesses qui paraissaient alors excessives ont été réalisées en ces derniers temps et peut-être même dépassées.

Actuellement, on peut dire que le problème balistique dans un milieu de densité homogène est numériquement résolu avec toute l'approximation jugée nécessaire. Mais il n'en est rien dans la pratique en raison même de la variation de la densité de l'air avec l'altitude et la latitude, d'où suit la nécessité d'attribuer à l'air une densité

moyenne pour chaque arc calculé et par suite de réduire l'amplitude de ces derniers, ce qui allonge notablement les calculs. Didion, Siacci, Braccialini, Vallier, Charbonnier, Cranz ont indiqué certains procédés permettant de simplifier et d'abréger ces calculs.

Cette discussion montre que les questions de Balistique ont occupé et occupent encore les mathématiciens les plus distingués et les esprits les plus profonds. Il ne faut donc pas croire que cette science ne doit relever que de l'expérience. Bien au contraire, l'expérience seule est insuffisante pour établir les lois générales qui régissent les phénomènes du tir. Tout le monde sait, en effet, que les épreuves n'inspirent de confiance qu'autant que les circonstances en sont bien connues; elles présentent trop souvent des divergences qui ne doivent pas rester ignorées; quelquefois même on peut les interpréter différemment, et si plus tard de nouveaux faits surgissent, ceux-ci peuvent modifier les conclusions qu'on avait tirées: il importe que les diverses séries d'observations puissent être comparées les unes aux autres.

Par l'expérience seule, on arrive ou l'on peut arriver à une conclusion; mais seulement après de grands sacrifices de temps et d'argent. Puis, quand après de si longs délais, après tant de poudre brûlée, on parvient à dresser une table de tir, les résultats sont-ils bien ceux qu'on avait escomptés? Ce n'est au contraire, qu'en ayant recours aux principes de la mécanique rationnelle et de l'analyse mathématique qu'on arrive à établir les lois auxquelles sont soumis les phénomènes si complexes du tir.

La grande Guerre a posé à nouveau le grave problème balistique dans toute sa généralité et sa complexité. L'emploi des canons de très gros calibre et des canons à très longues portées a tout remis en question. Grand a été l'étonnement et vive a été l'émotion quand, au début de la guerre, on parla des obusiers allemands de 420. Disons tout de suite que les Allemands n'ont pas été les premiers à construire des canons d'un pareil calibre. Il y a plus de vingt-cinq ans, la marine italienne avait déjà expérimenté à la Spezzia un canon de 420 millimètres de calibre et pesant 100 tonnes.

Ces fameux obusiers allemands de 420 ont-ils bien réalisé tout ce qu'on attendait d'eux? Et les chutes des places fortes de Liège, Namur et Maubeuge sont-elles réellement dues aux seuls effets de leur tir? N'a-t-on pas dit, au contraire, que les 380 et 305 autrichiens avaient obtenu des résultats plus terrifiants que les 420 allemands?

Pour donner la réponse à ces canons de très gros calibre, on a cru bon, dans les pays de l'Entente et particulièrement en France, de construire des pièces de calibre encore plus fort. On a été jusqu'à forger des canons de 600! Mais on ignore complètement ce que peuvent donner de pareilles pièces.

Cette tendance à l'augmentation du calibre est-elle bien justifiée? N'est-elle pas au contraire nuisible, et n'existe-t-il pas une limite qu'il serait préjudiciable de dépasser? La discussion de ces diverses questions a déjà fait l'objet d'un Mémoire* dans lequel j'ai démontré que l'exagération du calibre était condamnable et que pour améliorer le rendement d'un canon et accroître sa portée, il fallait au contraire augmenter le poids du projectile et sur tout la vitesse initiale en allongeant la longueur d'âme et en faisant usage de poudres extrêmement lentes et à combustion plus progressive. Mes conclusions ont dû être confirmées par l'expérience: les Allemands ont construit des canons spéciaux qui ont bombardé Paris à 120 kilomètres de distance.

Or jamais la Balistique, telle qu'elle était enseignée avant la guerre ne s'était occupée de canons aussi fantastiques, et elle était muette sur les moyens de calculer a priori les éléments du tir de pareilles

*Le mémoire a été déposé au Ministère des Inventions le 6 Octobre 1916, comme l'atteste le récépissé N° 11104, qui m'a été délivré. Monsieur Paul Painlevé était alors ministre de l'Instruction Publique, des Beaux-Arts et des Inventions intéressant la Défense Nationale. Chose incroyable, mon mémoire s'est égaré. Déjà, lorsque j'étais ingénieur au service de l'Artillerie des usines du Creusot (1888-1894), j'avais indiqué que l'avenir de l'artillerie était dans l'augmentation de la vitesse initiale, et je préconisais les canons longs, très longs même. Mais, et le parallélisme est au moins curieux, mes avis, comme mon mémoire n'ont pas été retenus.

bouches à feu. C'est sans doute pour ce motif que les canons de très gros calibre qui ont été créés en France durant cette guerre affreuse sont encore sans tables de tir !

C'est cette grave question du rendement d'un canon de gros calibre et à très longues portées que je me propose de résoudre dans la présente Thèse. Il semble opportun, à notre époque troublée de reprendre ce problème de Ballistique, de le discuter, de montrer les avantages et les inconvénients de ces canons géants et d'indiquer enfin leur emploi judicieux.

Il me reste à remercier et, de tout cœur, ceux qui ont bien voulu m'encourager et m'aider de leurs conseils et de leur science et plus particulièrement mon fils Georges, élève de l'École normale supérieure, licencié ès sciences mathématiques, lieutenant au 24^{ème} régiment d'infanterie qui, tout en combattant s'est chargé de l'établissement de certaines Tables qui figurent dans cette Thèse.

Que Messieurs les Examinateurs veuillent bien accepter mes plus vifs remerciements pour leur haute bienveillance à mon égard et pour le bon accueil qu'ils ont fait à un travail dont la faiblesse n'a pour excuse que sa grande difficulté.

8 Septembre 1918.

Définitions — Des Notations adoptées — Des Unités choisies.

Définitions — On appelle :

Ligne de tir, la ligne OL (fig. 1) qui prolonge l'axe du canon au moment où celui-ci est pointé et prêt à faire feu. Plan de tir, le plan vertical qui passe par la ligne de tir. Angle de tir χ , l'inclinaison de la ligne de tir sur l'horizon.

Trajectoire, la courbe décrite dans l'espace par le centre de gravité du projectile pendant son trajet. Origine de la trajectoire O , le point initial du mouvement dans l'air ; ce point est le centre de la bouche du canon.

Au moment du départ du coup, l'ensemble de la pièce est violemment rejeté en arrière par l'action des gaz provenant de la combustion de la poudre et l'axe du canon a déjà subi un certain déplacement à l'instant où le projectile franchit la bouche de la pièce. Il en résulte que le projectile est lancé suivant une direction différente de celle de la ligne de tir.

Ligne de projection, la ligne OT suivant laquelle le projectile est réellement lancé. Cette ligne est la tangente au point origine O de la trajectoire. Plan de projection, le plan vertical passant par la ligne de projection. Angle de projection ou de départ α , l'inclinaison de la ligne de projection sur l'horizon.

Angle de relèvement i , l'excès positif ou négatif, mais généralement positif de l'angle de projection sur l'angle de tir : $i = \alpha - \chi$. Angle d'écart horizontal η , l'angle du plan de tir avec le plan de projection ; cet angle généralement très faible peut dans la plupart des cas être négligé.

Point de chute, le point (P, P') où la trajectoire rencontre de nouveau le plan horizontal mené par l'origine. Il ne faut pas le confondre avec le Point d'arrivée qui est le point où le projectile rencontre le sol.

Portée X , la distance OP' du point de chute à l'origine.

Abaissement TM' en un point M' la distance verticale du point M' à la ligne de projection ; elle est donnée par l'égalité : $TM' = Tm - M'm = x \lg \alpha - y$; x, y étant les coordonnées du point (M, M') . En particulier, au point de chute (P, P') , l'abaissement est : $OP' \lg \alpha$.

Sommet S , le point le plus élevé de la trajectoire. Fleche U , l'ordonnée du sommet.

Inclinaison ψ , l'angle que fait la vitesse ou la tangente à la trajectoire avec le plan horizontal passant par le point M' . Elle est positive quand la vitesse est dirigée au-dessus de ce plan horizontal ; elle est donc positive sur la branche ascendante de la trajectoire, nulle au sommet, négative le long de la branche descendante.

Angle de chute ω , toujours positif, la valeur absolue de l'inclinaison au point de chute : $\omega = |\psi|$

Vitesse initiale V , la vitesse de translation du projectile à l'origine de la trajectoire. Vitesse restante W en

V	la vitesse initiale du projectile mesurée à la bouche du canon;	} exprimés en mètres.
w	la vitesse restante tangentielle en un point (x,y) de la trajectoire;	
v	la vitesse restante tangentielle au point de chute;	
w'	la vitesse restante horizontale en un point (x,y) de la trajectoire;	
w ₀	la vitesse horizontale au point de départ;	
v'	la vitesse restante horizontale au point de chute;	
w''	la vitesse restante verticale en un point (x,y) de la trajectoire;	
w ₀ ''	la vitesse verticale au point de départ;	
v''	la vitesse restante verticale au point de chute;	
D	la dérivation en un point (x,y) de la trajectoire;	
D _c	la dérivation au point de chute;	} exprimés en kilogrammes
d	le calibre du canon ou le diamètre intérieur de l'âme du canon;	
g	l'accélération de la pesanteur au lieu d'expérience;	
R	le rayon de la Terre;	
H _z	la pression atmosphérique au lieu d'altitude z et au moment de l'expérience;	
F _t	la tension maximum de la vapeur d'eau à la température t;	
f _t	la force élastique de la vapeur d'eau au moment de l'expérience;	
p	le poids du projectile;	
ω	le poids de la charge d'explosif introduite dans le canon;	
Δ	le poids du mètre cube d'air atmosphérique au lieu et au moment de l'expérience;	
E	l'énergie cinétique du projectile au point de chute exprimée en tonnes-kilomètres.	} exprimées en secondes de temps solaire moyen. } exprimées en degrés centigrades.
R	la résistance de l'air exprimée en kilogrammes par centimètre carré;	
τ	la durée de trajet de l'origine O au point (x,y) de la trajectoire;	
T	la durée totale du trajet de l'origine O au point de chute;	
t	la température de l'atmosphère au lieu et au moment de l'expérience;	
Θ	la température absolue: $\Theta = 273 + t$;	
χ	l'angle de tir;	
α	l'angle de projection ou de départ;	
i	l'angle de relèvement;	
η	l'angle d'écart horizontal;	
ε	l'angle de site;	} exprimés en degrés sexagésimaux.
ψ	l'angle de la tangente au point (x,y) de la trajectoire avec le plan horizontal passant par ce point;	
ω	l'angle de chute;	
γ	l'angle de la méridienne génératrice de l'ogive du projectile avec son axe;	
θ	l'inclinaison finale des rayures du canon;	
φ	la latitude du lieu d'expérience;	
ν	l'azimut ou angle que l'axe du canon fait avec la méridienne du lieu d'expérience;	
K	une fonction dépendant de la forme du projectile, des diverses conditions du tir et du lieu d'expérience;	
S	une quantité auxiliaire définie par la relation: $S = KV^2X$;	
Γ	un paramètre dépendant de l'inclinaison finale θ des rayures du canon et de la forme du projectile;	
k	une constante;	
A	l'indice caractéristique du projectile: $A = \frac{k}{2g}$;	
c	le coefficient balistique du projectile: $c = A\Delta \frac{g}{p}$;	
λ	le coefficient de rendement du projectile;	
j	le coefficient de réduction du projectile: $j = \frac{1}{\lambda}$;	
μ	le paramètre balistique du projectile: $\mu = \lambda \frac{p}{g^2}$;	

- Λ le paramètre de forme du projectile : $\Lambda = \lambda \frac{g}{p} \sin \gamma = \frac{\lambda}{\mu} \sin \gamma$;
 Λ' une fonction dépendant de l'angle de projection α et de la vitesse initiale V ;
 Ξ une fonction dite géographique dépendant des données géographiques du lieu d'expérience ;
 Ψ une fonction perturbatrice dite de réfraction atmosphérique .

Il est bien entendu que si quelques modifications sont apportées à ces notations et aux unités ainsi choisies dans le cours de notre étude, il en sera immédiatement fait mention.

Nota — Chaque canon recevra un numéro désignant son type. Le numéro étant partagé en tranches de trois chiffres à partir du chiffre des unités ; la première tranche à gauche représentera le calibre du canon exprimé en millimètres, la deuxième tranche indiquera la vitesse initiale du projectile exprimée en décamètres par seconde et la dernière tranche donnera le poids du projectile exprimé en dizaines de kilogrammes. Ainsi le canon du type.

360 160 045

est un canon dont le calibre est de 360 millimètres, la vitesse initiale est de 160 décamètres par seconde, et le poids du projectile est de 45 fois 10 kilogrammes. De sorte que pour ce canon, on a :

$$a = 0^m, 360$$

$$V = 1600^m$$

$$p = 450^{kg}$$

Chapitre I^{er}

Problème balistique général.

§1. Préliminaires — La Balistique est la science du mouvement des corps pesants lancés dans l'espace suivant une direction quelconque. Elle a pour principal objet l'étude du mouvement des projectiles lancés par des bouches à feu. On distingue la Balistique intérieure, qui étudie le mouvement du projectile dans l'âme du canon, et la Balistique extérieure qui étudie le mouvement du projectile lors qu'il est sorti de la bouche à feu et est soumis à l'action de la pesanteur et de la résistance du milieu dans le quel il se meut.

Dans l'état actuel de la Physique, de la Mécanique et de l'Analyse infinitésimale, ce problème n'est pas abordable dans toute sa généralité. Mais quand il s'agit de rechercher les lois du mouvement des projectiles de l'artillerie, on peut apporter dans chaque cas envisagé quelques simplifications dans l'énoncé de ce problème aussi vaste que complexe. Ces simplifications constituent les hypothèses servant de base à la Balistique extérieure usuelle.

Ces hypothèses s'appliquent aux quatre objets mis en présence dans cette importante question : la Terre, la Gravité, l'Atmosphère et le Projectile.

§2. Terre — On suppose, en général, dans l'étude du mouvement des projectiles et pour les trajectoires usuelles limitées aux deux extrémités à la surface de la Terre, que celle-ci est plane et immobile.

a) - Pour les tirs dont la portée ne dépasse pas 25 à 30 kilomètres, on peut admettre que la Terre est plane, car les erreurs commises sur les divers éléments du tir sont négligeables. Mais il n'en est plus de même pour les tirs à très longues portées. Nous montrerons, en effet, que pour une portée de 120 kilomètres, l'erreur commise en considérant la Terre comme plane surpasse 800 mètres, ce qui n'est pas à négliger.

b) - L'immobilité de la Terre est une hypothèse du même ordre. Il ne s'agit pas évidemment de l'influence du mouvement de translation autour du Soleil, qui quoique représentée par une vitesse d'environ 30 kilomètres par seconde peut-être considérée comme nulle ; mais de l'influence de la rotation de la Terre sur elle-même dans son mouvement diurne.

En 1833, Reich avait déjà constaté dans les expériences célèbres qu'il fit dans les mines de la Saxe que pour une chute de 158^m5 un corps tombant sans vitesse initiale subissait une déviation à l'Est de 28^m3, la durée de la chute étant de 6 secondes environ.

« Quand un projectile part de la surface de la Terre, et qu'il est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse donnée; on conçoit que pendant la durée de son élévation, il doit s'écarter de la verticale vers l'Ouest, ou en sens contraire de la rotation de la Terre. Il semble qu'ensuite, durant sa chute, il devrait se rapprocher de cette ligne et retomber à peu près à son point de départ; mais il n'en est point ainsi. Parvenu au point le plus haut de sa trajectoire, et lorsqu'il a perdu toute sa vitesse verticale, le projectile en dérivant vers l'Ouest a aussi acquis une vitesse horizontale dans le même sens du moins pendant une partie de sa chute. La difficulté analytique que ce second cas présente est de raccorder, pour ainsi dire, les deux mouvements successifs, ascendant et descendant du projectile, qui sont exprimés par des formules très différentes, lorsque l'on tient compte de la résistance de l'air. » (Poisson. Recherches sur le mouvement des projectiles dans l'air. p. 7).

En général, dans l'établissement des Tables de tir, on ne tient pas compte de la rotation de la Terre; et pourtant quand il s'agit de canons à très longues portées, l'erreur commise en supposant la Terre immobile, n'est pas négligeable dans certains cas.

§ 3. Gravité — Dans l'étude du mouvement des projectiles on suppose que la gravité est une force constante en grandeur et en direction. Dans le tir de plein fouet, ces deux hypothèses sont assez légitimes. Mais comme elles ne peuvent être considérées comme vraies que pour une petite zone autour d'un point du globe, tandis qu'en réalité, la gravité varie suivant l'altitude et la latitude, pour les canons à très longues portées, il y a lieu de calculer l'erreur commise quand on suppose que la grandeur et la direction de la gravité sont constantes.

§ 4. Atmosphère — Le cas le plus simple consiste évidemment à supposer que l'air dans lequel se meut le projectile est de densité constante et reste immobile. Mais en réalité, la densité de l'air et par suite la résistance qui en est une fonction varie avec l'altitude et la latitude.

Quand un projectile est lancé sous un petit angle de projection, on peut à la rigueur supposer constante la densité de l'air; mais il est de toute nécessité, dans le tir courbe, de tenir compte de la variation de la densité de l'air. Dans un tir à très longue portée, le projectile peut s'élever à plus de 40 kilomètres dans l'atmosphère. Or à cette altitude le mètre cube d'air ne pèse que 3 grammes environ! Dans ces régions supérieures, le mouvement du projectile ressemble beaucoup au mouvement qu'il prend dans le vide.

La présence de l'atmosphère modifie légèrement, il est vrai, le poids du projectile, car si p est son poids dans le vide, dans l'air il n'est plus réellement que : $p - p'$, p' étant le poids d'air qu'il déplace; mais cette modification est insignifiante, car à volume égal, un projectile pèse environ 5000 fois plus que l'air. Qu'il nous suffise de la mentionner. Enfin, l'atmosphère n'est pas immobile, car le vent a pour effet de modifier les conditions du tir. Cependant, quand on établit une Table de tir, on suppose que l'air est calme. Il est bon néanmoins d'indiquer les écarts provoqués par le vent suivant sa violence.

§ 5. Projectile — Un projectile qui se meut dans un milieu résistant est sollicité par deux espèces de forces: par la pesanteur, qui agit sur toutes les molécules et par la résistance du milieu qui s'exerce sur tous les points de sa surface. Or on sait que le centre de gravité d'un corps se meut de la même manière que si toute sa masse y était concentrée et que toutes les forces extérieures y fussent transportées parallèlement à elles mêmes. Il en résulte que le mouvement de translation du projectile est le même que celui d'un point matériel de même masse que lui auquel serait appliqué la résultante de la pesanteur et de la résistance.

Pour les projectiles sphériques dont le centre de gravité coïncide avec le centre de figure et pour les projectiles oblongs animés d'un seul mouvement dans le sens même de leur axe, la résistance de l'air se réduit par

raison de symétrie, à une force unique dirigée en sens inverse du mouvement de translation et ne dépendant que de la vitesse de ce mouvement pour une valeur donnée de la densité du milieu. La résistance est alors dite tangentielle.

Mais en réalité les choses ne se passent pas aussi simplement, le projectile est un corps solide généralement animé d'un mouvement de rotation de telle sorte que les actions extérieures produisent sur lui l'effet d'un couple perturbateur modifiant son régime dans l'air et par suite le mouvement de son centre de gravité. La résistance du milieu n'est plus à une force unique, mais à une force et à un couple n'est plus tangentielle. L'axe du projectile subit dans ces conditions des mouvements secondaires dits de précession et de nutation, rappelant les mouvements analogues des axes des diverses planètes. La résolution théorique exacte et complète du problème du mouvement d'un projectile sur lui-même analogue à celle du problème de la toupie n'est pas encore possible dans l'état actuel de la science, parce que l'on manque des bases expérimentales nécessaires relatives à la résistance de l'air et aux circonstances du mouvement dans le voisinage de la bouche du canon.

Actuellement la vitesse de rotation du projectile est déterminée par sa vitesse initiale et par le tracé des rayures du canon. Elle ne doit être ni trop grande ni trop faible. Une limite supérieure est imposée, entre autres choses, par des considérations de balistique intérieure, et aussi par ce fait que le projectile ne doit pas en arrivant au but porter sur le culot, car il en résulterait une perte d'effet utile. Une limite inférieure est déterminée par la condition que le projectile allongé doit conserver le long de sa trajectoire une stabilité suffisante.

Les lois mathématiques concernant cette stabilité ont été établies par Timmerhans (1861), Giffon (1861), Terssen (1861), mais surtout par von Wruck, Greenhill (1882), Vallier, Zabudskij et M. le comte Magnus de Sparre (1911).

Le phénomène de dérivation des projectiles oblongs résulte de la non-coïncidence de l'axe de figure et de la tangente à la trajectoire. Or l'expérience montre que la dérivation, dans le tir de plein fouet n'éloigne le point de chute du plan de projection que d'une quantité très faible par rapport à la portée. De plus, l'étude théorique du phénomène montre que dans le cas d'un projectile animé d'une grande vitesse de rotation l'écart entre l'axe de figure et la tangente reste, en général, très petit. La force déviatrice qui produit la dérivation est toujours très faible par rapport à la force principale qui est la résistance tangentielle. Dans le tir à très longues portées, l'influence de la dérivation est beaucoup plus grande. Néanmoins, en première approximation, on peut négliger cette force déviatrice et considérer indépendamment l'un de l'autre le mouvement principal dû à la seule résistance tangentielle et le mouvement perturbateur dû à la force déviatrice. Le phénomène de dérivation a été étudié particulièrement par Malus, de Saint-Robert, Maievskij, Charbonnier, von Wruck, Zabudskij et M. le comte Magnus de Sparre. Malgré toutes ces recherches, on en est encore réduit, dans la pratique, à se rapporter à l'expérience.

§ 6. Division du problème balistique général — Il résulte des considérations précédentes que l'on peut apporter une très grande simplification à l'énoncé du problème balistique général. Elles autorisent, en effet, à diviser le problème en deux parties bien distinctes : la première ayant pour objet l'étude du mouvement principal dû à un petit nombre de forces prépondérantes, l'autre consacrée à l'étude des perturbations dues à un grand nombre de causes dont l'action est moindre.

Le problème balistique principal peut donc s'énoncer ainsi : Etudier le mouvement d'un point matériel pesant dans un milieu en repos de densité constante qui lui oppose une résistance tangentielle, fonction de la vitesse, la Terre étant supposée plane et immobile, la gravité étant constante en grandeur et en direction.

Le problème étant résolu, il y a lieu d'étudier les modifications qu'il faut apporter aux résultats obtenus. Dans la plupart des cas tous les termes correctifs sont très petits, quoique parfois non négligeables. On peut les

calculer séparément et leur somme algébrique donne la correction totale à apporter aux différents éléments du tir. L'importance des problèmes balistiques secondaires est beaucoup plus grande dans le tir à très longues portées.

La variation de la densité de l'air atmosphérique avec l'altitude et la latitude jouant un rôle considérable dans le tir à très longues portées qui nous occupe ici plus spécialement, nous étudierons tout particulièrement son influence sur les éléments du tir courbe et les formules du problème balistique principal seront établies en supposant le milieu en repos, mais de densité variable; et ce n'est que lorsque nous aurons obtenu ces formules que nous nous occuperons des corrections à apporter provenant de :

I - La Terre — 1^{re} sphéricité; 2^{re} rotation.

II - La Gravité — 1^{re} variation avec l'altitude; 2^{re} variation avec la latitude; 3^{re} convergence des verticales.

III - L'Atmosphère — Vent atmosphérique.

IV - Le Projectile — Dérivation.

Première partie.

Problème Balistique principal.

Chapitre II.

Mouvement des projectiles dans le vide.

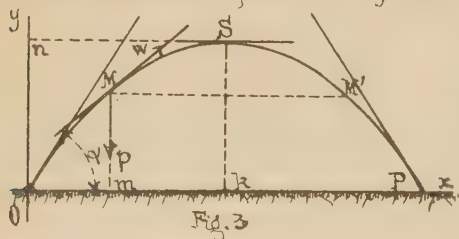
§7. Généralités — La connaissance des lois du mouvement des projectiles dans le vide a constitué pendant longtemps toute la Balistique extérieure. On sait qu'un point matériel lancé dans le vide décrit une parabole.

Les lois du mouvement parabolique méritent d'être rappelées : 1^{re} Parce qu'elles constituent une première approximation déjà satisfaisante des lois du mouvement dans l'air, dans un certain nombre de cas; 2^{re} Parce que les formules établies pour le vide servent de comparaison et permettent d'apprécier dans chaque cas l'influence propre de la résistance de l'air; 3^{re} Parce que la courbure d'une trajectoire en un point ne dépend que de la grandeur et de l'inclinaison de la vitesse en ce point, quelle que soit la résistance de l'air. Elle est la même que dans le vide, ρ étant le rayon de courbure de la trajectoire en un point quelconque (x, y) ; on a, en effet :

$$\frac{w^2}{\rho} = g \cos \psi \quad (1)$$

Cette relation très importante équivaut à l'une des équations différentielles de la trajectoire dans un milieu résistant. Elle exprime que : La courbure de la trajectoire en un point dépend uniquement de la grandeur et de l'inclinaison de la vitesse en ce point, quelle que soit la résistance du milieu supposée tangentielle. Elle est la même que dans le vide.

§8. Equations du mouvement. — Dans le vide, une seule force agit sur le projectile : son poids, lequel est appliqué au centre de gravité. Cette force est supposée ici constante en grandeur et en direction. Le centre de gravité restera donc toujours dans le plan qui contient à un instant quelconque la direction de la pesanteur et celle de la vitesse acquise. La trajectoire est par suite une courbe plane contenue dans le plan de projection.



Soit O le centre de la bouche du canon pris pour origine des coordonnées. Le mouvement du centre de gravité M du projectile (fig. 3) est rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy situés dans le plan de projection. Ox étant horizontal et Oy vertical. Soient p le poids du projectile, g la gravité, t le temps compté à partir de l'origine O de la trajectoire, les deux équations qui définissent le mouvement du point M, sont :

c'est-à-dire : $\frac{p}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = 0$, et $\frac{p}{g} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -p$;

$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, (2) et $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$. (3)

Nous voyons tout d'abord que : 1° - Le mouvement du centre de gravité est indépendant du poids du projectile; 2° - La projection m du centre de gravité M sur l'axe Ox se meut d'un mouvement uniforme; 3° - La projection n du centre de gravité M sur l'axe Oy se meut d'un mouvement uniformément varié.

Une première intégration des équations (2) et (3) donne :

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad (4) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = b - gt; \quad (5)$$

a et b étant des constantes qu'il s'agit de déterminer. Pour cela, si V désigne la vitesse initiale et α l'angle de projection; à l'origine du temps, soit pour $t=0$, les projections de la vitesse du mobile sur Ox et Oy sont respectivement $V \cos \alpha$ et $V \sin \alpha$. Il faut donc que pour $t=0$, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ prennent respectivement les valeurs $V \cos \alpha$ et $V \sin \alpha$, par conséquent

$$a = V \cos \alpha, \quad \text{et} \quad b = V \sin \alpha;$$

et on a :

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \alpha, \quad (6) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = V \sin \alpha - gt. \quad (7)$$

Une nouvelle intégration donne en remarquant que pour $t=0$, on a $x=y=0$,

$$x = V t \cos \alpha, \quad (8) \quad \text{et} \quad y = V t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \quad (9)$$

Telles sont les équations paramétriques de la trajectoire. L'élimination de t entre ces équations (8) et (9) conduit à l'équation de la trajectoire qu'il importe de bien retenir :

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos^2 \alpha}. \quad (10)$$

Observons que le premier terme du second membre correspond au second membre de l'équation de la tangente à l'origine 0 : $y = x \tan \alpha$, et que le second terme représente l'abaissement du projectile. Cet abaissement équivaut à : $\frac{1}{2} g t^2$, et a pour valeur : $\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V \cos \alpha} \right)^2$.

L'équation (10) représente une parabole à axe vertical et passant par l'origine.

§ 9. Éléments du tir — 1° Portée — En faisant $y=0$ dans l'équation (10), on trouve d'abord la solu-

tion $x=0$, qui correspond à l'origine 0, puis :

$$x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos^2 \alpha} = 0, \quad \text{ce qui donne la portée } X : \quad X = \frac{2 V^2}{g} \tan \alpha \cos^2 \alpha = \frac{2 V^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha, \quad \text{ou : } X = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (11)$$

Cette formule (11) montre que : 1° - la portée maximum se produit sous l'angle de projection : $\alpha = 45^\circ$ et a pour valeur : $\max. X = \frac{V^2}{g}$; 2° - la portée est la même pour deux angles de projection complémentaires, car :

$$\sin 2\alpha = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

2° Inclinaison de la tangente — On obtient l'inclinaison ψ en un point (x,y) de la trajectoire en différentiant l'équation de la trajectoire par rapport à x :

$$\frac{dy}{dx} = \tan \psi = \tan \alpha - \frac{g x}{V^2 \cos^2 \alpha}. \quad (12)$$

3° Angle de chute — En raison de la symétrie des deux branches de la trajectoire par rapport à l'axe vertical, l'angle de chute est égal à l'angle de projection : $\omega = \alpha$. (13)

4° Abscisse du sommet — Cette abscisse X_s est égale à la moitié de la portée : $X_s = \frac{X}{2}$,

par suite :

$$X_s = \frac{V^2}{2g} \sin 2\alpha. \quad (14)$$

5° Ordonnée du sommet ou flèche de la trajectoire — La flèche y_s s'obtient en faisant : $x = X_s = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{2g}$, dans l'équation (10). On trouve :

$$y_s = \frac{V^2 \sin 2\alpha \tan \alpha}{2g} - \frac{g V^4 \sin^2 2\alpha}{2g V^4 \cos^4 \alpha} = \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad \text{ou : } y_s = \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (15)$$

Cette expression peut encore en multipliant haut et bas par $4g V^2 \cos^2 \alpha$:

$$y_s = \frac{4 V^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{8 g^2 V^2 \cos^4 \alpha} = \frac{g}{8 V^2 \cos^2 \alpha} \times \frac{4 V^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2} = \frac{g}{8 V^2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} \right)^2,$$

et en tenant compte de la relation (11) :

$$y_s = \frac{g X^2}{8 V^2 \cos^2 \alpha}. \quad (16)$$

La flèche y_s est donc égale au quart de l'abaissement qui correspond au point de chute.

6° Durée de trajet — La vitesse horizontale $V \cos \alpha$ est constante, la durée de trajet τ jusqu'au point d'abaisse se x est alors donnée par la relation (8), et a pour valeur :

$$\tau = \frac{x}{V \cos \alpha}. \quad (17)$$

7° Durée totale de trajet — La durée totale de trajet T est donnée par la relation :

$$T = \frac{X}{V \cos \alpha}, \quad (18)$$

ce qu'on peut écrire :

$$T = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g V \cos \alpha} = \frac{2 V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g V \cos \alpha} = \frac{2 V \sin \alpha}{g}. \quad (19)$$

C'est encore le temps que mettrait le mobile pour parcourir en chute libre la hauteur totale : $X \tan \alpha = \frac{1}{2} g T^2$;
d'où :

$$T = \sqrt{\frac{2X \tan \alpha}{g}}. \quad (20)$$

La comparaison des formules (15) et (19) permet d'écrire :

$$Y_s = \frac{g}{8} \cdot \frac{4V^2 \sin^2 \alpha}{g^2} = \frac{g}{8} \left(\frac{2V \sin \alpha}{g} \right)^2 = \frac{g T^2}{8}. \quad (21)$$

8° Vitesse en un point (x, y) de la trajectoire. — Si w est la vitesse au point (x, y) pour lequel l'inclinaison est ψ , comme on sait que la projection de la vitesse sur l'axe Ox est constante, on a : $w \cos \psi = V \cos \alpha$, ce qui donne :

$$w = V \frac{\cos \alpha}{\cos \psi}. \quad (22)$$

On peut encore dire que la perte de force vive entre l'origine et le point considéré (x, y) est égal au travail de la pesanteur sur la hauteur y, et écrire :

$$\frac{1}{2} (V^2 - w^2) = g y,$$

ou encore : $V^2 - w^2 = 2gy$,

et finalement :

$$w = \sqrt{V^2 - 2gy}. \quad (23)$$

Cette relation mise sous la forme :

$$y = \frac{V^2 - w^2}{2g} \quad (24)$$

permet de calculer à quelle hauteur y le mobile a une vitesse déterminée w. Le problème admet une solution unique en y pour toute valeur de w. Les composantes de la vitesse w sont :

pour la composante horizontale :

$$w' = w \cos \psi = V \cos \alpha, \quad (25)$$

" verticale :

$$w'' = w \sin \psi = \frac{V \cos \alpha}{\cos \psi} \sin \psi = V \cos \alpha \tan \psi. \quad (26)$$

Au point de chute, la vitesse restante est :

$$v = V, \quad (27)$$

et les composantes de celle-ci sont :

$$v' = V \cos \alpha, \quad (28) \quad \text{et : } v'' = V \sin \alpha, \quad (29)$$

La vitesse au sommet S est :

$$w_s = V \cos \alpha, \quad (30) \quad \text{puisque en ce point : } \psi = 0.$$

et les composantes de cette vitesse sont :

$$w'_s = V \cos \alpha, \quad (31) \quad \text{et : } w''_s = 0. \quad (32)$$

9° Foyer et directrice. — Transportons les axes Ox et Oy parallèlement à eux-mêmes de façon que l'origine O vienne au sommet S dont les coordonnées sont : $X_s = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{2g}$, et : $Y_s = \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g}$; l'équation de la trajectoire prend les formes successives :

$$\begin{aligned} y + \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g} &= \left(x + \frac{V^2 \sin 2\alpha}{2g} \right) \tan \alpha - \frac{g \left(x + \frac{V^2 \sin 2\alpha}{2g} \right)^2}{2V^2 \cos^2 \alpha} = \left(x - \frac{V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{g \left(x + \frac{V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2}{2V^2 \cos^2 \alpha}, \quad \text{ou encore :} \\ y - \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g} &= \frac{x \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{g x^2}{2V^2 \cos^2 \alpha} - \frac{V^2 x \sin \alpha \cos \alpha}{V^2 \cos^2 \alpha} - \frac{V^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2g V^2 \cos^2 \alpha}, \quad \text{ce qui donne :} \\ y &= -\frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{x \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{g x^2}{2V^2 \cos^2 \alpha} - \frac{x \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g} = -\frac{g x^2}{2V^2 \cos^2 \alpha}, \quad \text{c'est-à-dire :} \\ x^2 &= -2 \frac{V^2 \cos^2 \alpha}{g} y, \quad (33) \end{aligned}$$

équation d'une parabole dont le paramètre est :

$$\frac{V^2 \cos^2 \alpha}{g}.$$

La directrice est donc à la distance $\frac{V^2 \cos^2 \alpha}{g}$ du sommet, lequel est à la distance $\frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ de l'axe Ox ; de sorte que par rapport aux axes primitifs de coordonnées Ox, Oy, l'équation de la directrice est :

$$y = \frac{V^2 \cos^2 \alpha}{2g} + \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{V^2}{2g}$$

Toutes les trajectoires issues du point O et ayant même vitesse initiale V, mais des angles de projection α différents admettent la même directrice :

$$y = \frac{V^2}{2g}.$$

Les coordonnées du foyer par rapport aux axes primitifs sont :

$$\frac{V^2 \sin 2\alpha}{2g} = X_s,$$

et :

$$\frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g} - \frac{V^2 \cos^2 \alpha}{2g} = -\frac{V^2}{2g} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\frac{V^2}{2g} \cos 2\alpha ;$$

ainsi pour : $\alpha < 45^\circ$ le foyer est au-dessous de l'axe Ox,

" $\alpha = 45^\circ$ " sur l'axe Ox,

" $\alpha > 45^\circ$ " au-dessus de l'axe Ox.

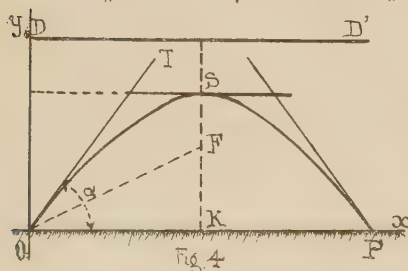


Fig. 4

De ce que, d'après la définition de la parabole (fig. 4) : $QF = OS = \frac{V^2}{2g}$, on conclut que : le lieu des foyers de toutes les paraboles issues du point O et qui se présentent les trajectoires des projectiles tirés avec une même vitesse initiale V est un cercle de centre O et de rayon égal à $\frac{V^2}{2g}$.

La ligne de projection OT est bissectrice de l'angle DOF.

Déterminons maintenant le lieu des sommets S de ces paraboles. Pour cela, éliminons α entre les équations : $X_s = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{2g}$, et $Y_s = \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g}$,

on peut écrire:

$$X_s = \frac{2V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2g}, \quad \text{et} \quad X_s^2 = \frac{4V^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4g^2};$$

$$\text{or:} \quad \sin^2 \alpha = \frac{2g}{V^2} y_s,$$

ce qui donne:

et l'équation du lieu cherché est:

ou définitivement:

c'est une ellipse passant par l'origine, tangente en ce point à l'axe des x et admettant pour grand axe la droite: $y = \frac{V^2}{4g}$ et pour petit axe, l'axe Oy . Les coordonnées du centre sont 0 et $\frac{V^2}{4g}$. Le grand axe a pour longueur $\frac{V^2}{2g}$ et le petit axe $\frac{V^2}{4g}$.

§ 10. Problème — Sous quel angle de projection α faut-il lancer un projectile avec une vitesse initiale donnée V pour atteindre un point déterminé?

Soit M le point qu'il s'agit de battre et dont les coordonnées sont x_1, y_1 ; écrivons que ces coordonnées satisfont à l'équation de la trajectoire (10). Nous avons: $y_1 = x_1 \tan \alpha - \frac{g x_1^2}{2V^2 \cos^2 \alpha} = x_1 \tan \alpha - \frac{g x_1^2}{2V^2} (1 + \tan^2 \alpha)$; nous obtenons ainsi une équation du deuxième degré pour déterminer $\tan \alpha$:

$$\frac{g x_1^2}{2V^2} \tan^2 \alpha - x_1 \tan \alpha + y_1 - \frac{g x_1^2}{2V^2} = 0. \quad (35)$$

Pour que cette équation admette des racines, il faut et il suffit que: $x_1^2 - 4 \frac{g x_1^2}{2V^2} (y_1 + \frac{g x_1^2}{2V^2}) \geq 0$, ou en divisant par: $\frac{4g x_1^2}{2V^2} > 0$ $\frac{V^2}{2g} - y_1 - \frac{g x_1^2}{2V^2} \geq 0. \quad (36)$

Si cette condition est remplie, il y a deux solutions répondant à la question, car l'équation (35) donne pour $\tan \alpha$, deux valeurs positives. Les foyers de ces paraboles sont à l'intersection du cercle, lieu des foyers et du cercle de centre M et tangent à la directrice: $y = \frac{V^2}{2g}$. La ligne OM est la ligne de site. (fig. 5). On sait que:

$\widehat{DOT} = \widehat{TOF}$ et $\widehat{DOT}' = \widehat{T'OF'}$, donc $\widehat{DOM} = 2\widehat{DOT} + \widehat{F'OM} = 2\widehat{DOT} - \widehat{FOM}$, et comme $\widehat{F'OM} = \widehat{FOM}$ il en résulte: $2\widehat{DOT}' = 2\widehat{DOT} - 2\widehat{FOM}$, Or $\widehat{DOT} = \widehat{TOF}$, donc: $\widehat{DOT}' = \widehat{TOF} - \widehat{FOM} = \widehat{TOM}$.

Si le but M se déplace sur la ligne de site, il ne sera atteint que si le cercle MF rencontre le cercle OD . Quand ces deux cercles sont tangents, les lignes OT et OT' sont confondues suivant la bissectrice de l'angle DOM , laquelle détermine l'angle de projection qui donne la Portée maximum sur la ligne de site considérée. Si en particulier, la ligne de site est confondue avec Ox , l'angle de portée maximum est égal à 45° .

Pour une même portée, les deux angles de projection sont complémentaires.

§ 11. Problème — Trouver le lieu géométrique des positions d'un projectile à une époque donnée quand α varie.

Les équations $x = Vt \cos \alpha$ et $y = Vt \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$ donnent: $\cos \alpha = \frac{x}{Vt}$ et $\sin \alpha = \frac{2y + gt^2}{2Vt}$, on en déduit immédiatement:

ou en développant et simplifiant:

finalement:

le lieu est un cercle dont le centre est sur l'axe Oy . Les coordonnées de ce centre sont: $x=0$, $y = -\frac{gt^2}{2}$;

Pour $t=0$, on a le cercle: $x^2 + y^2 = 0$,

C'est l'origine O des coordonnées,

Pour $t=1$, on a le cercle $4(x^2 + y^2) + 4gy + g^2 - 4V^2 = 0$, et les coordonnées du centre sont: $x=0$, $y = -2g$.

§ 12. Parabole de sûreté. — On désigne ainsi l'enveloppe de toutes les trajectoires des projectiles tirés d'un même point O avec la même vitesse initiale V sous tous les angles de projection possibles. On obtient son équation en éliminant α entre l'équation de la trajectoire:

et son équation dérivée par rapport à α :

ou mieux encore en écrivant que l'équation (35):

a ses racines égales, ce qui donne immédiatement:

$$1 - 4 \frac{g}{2V^2} (y - \frac{gx^2}{2V^2}) = 0$$

ou :

$$y = \frac{V^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V^2} \quad (38)$$

On obtient ainsi l'équation d'une parabole à axe vertical ayant son foyer à l'origine O et son sommet en D sur la directrice commune des courbes enveloppées. Elle coupe l'axe Ox en un point qui correspond à la portée maximum $\frac{V^2}{g}$. La tangente en ce point est inclinée de 45° sur Ox . La directrice de cette parabole est : $y = \frac{V^2}{g}$.

§ 13. — Éléments du tir correspondant à quelques portées maxima — Les portées maxima sont données pour $\alpha = 45^\circ$. Dans ce cas les formules donnant les éléments du tir sont :

$$X = \frac{V^2}{g}, \quad \omega = \alpha = 45^\circ, \quad X_s = \frac{V^2}{2g} = \frac{X}{2}, \quad Y_s = \frac{V^2}{4g} = \frac{X_s}{2} = \frac{X}{4}, \quad T = \sqrt{\frac{2X}{g}}, \quad v = V, \quad v' = v'' = 0,70711v. \quad (39)$$

Nous en déduisons le tableau suivant :

V	X	ω	X_s	Y_s	T	v	$v' = v''$	V	X	ω	X_s	Y_s	T	v	$v' = v''$
0^m	0^m	"	0^m	0^m	0^s	0^m	0^m	1200^m	$146,8$	45°	$73,4$	$36,7$	175^s	1200^m	849^m
100	1020	45°	510	255	14,4	100	70,7	1300	172,3	45°	86,1	43,1	187	1300	919
200	4078	45°	2039	1020	28,8	200	141,4	1400	199,8	45°	100,0	50,0	202	1400	990
300	9176	45°	4588	2294	43,3	300	212,1	1500	229,4	45°	114,7	57,3	216	1500	1061
400	16312	45°	8156	4078	57,7	400	282,8	1600	261,0	45°	130,5	65,2	231	1600	1131
500	25488	45°	12744	6372	72,1	500	353,6	1700	294,6	45°	147,8	73,9	245	1700	1202
600	36702	45°	18351	9176	86,5	600	424,3	1800	330,3	45°	165,2	82,6	259	1800	1273
700	49956	45°	24978	12489	100,9	700	495,0	1900	368,0	45°	184,0	92,0	274	1900	1344
800	65248	45°	32624	16312	115,3	800	565,7	2000	407,8	45°	203,9	101,9	288	2000	1414
900	82580	45°	41290	20645	129,8	900	636,4	2100	449,6	45°	224,8	112,4	303	2100	1485
1000	101950	45°	50975	25488	144,2	1000	707,1	2200	493,4	45°	246,7	123,3	317	2200	1556
								2300	539,3	45°	269,2	134,6	331	2300	1626
1000^m	102^m	45°	$51,0$	$25,5$	$14,4^s$	1000^m	707^m	2400	587,2	45°	293,6	146,8	346	2400	1697
1100	123,4	45°	61,7	30,8	159	1100	778	2500	637,2	45°	318,6	159,3	360	2500	1768

§ 14. — Résumé — Il résulte de tout ce qui précède que :

1° Les branches ascendante et descendante de la trajectoire dans le vide sont symétriques par rapport à la verticale menée par le milieu de la portée ; 2° L'abscisse du sommet est moitié de la portée ; 3° L'angle de chute est égal à l'angle de projection ; 4° La vitesse horizontale est constante tout le long de la trajectoire ; 5° La vitesse restante de chute est égale à la vitesse initiale ; 6° La portée maximum est donnée pour l'angle de projection de 45° .

§ 15. — Tableau récapitulatif des éléments du tir dans le cas du vide —

Point quelconque de la trajectoire	Point de chute	Sommet	Éléments du tir pour $\alpha = 45^\circ$
$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2 \alpha}$ $\tan \psi = \tan \alpha - \frac{gx}{V^2 \cos^2 \alpha}$ $z = \frac{x}{V \cos \alpha}$ $w = \frac{V \cos \alpha}{\cos \psi} = \sqrt{V^2 - 2gy}$ $w' = V \cos \alpha, \quad w'' = V \cos \alpha \tan \psi$	$X = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g}$ $\omega = \alpha$ $T = \frac{X}{\cos \alpha} = \sqrt{\frac{2X \tan \alpha}{g}}$ $v = V$ $v' = V \cos \omega, \quad v'' = V \sin \omega$	$X_s = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{X}{2}$ $Y_s = \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{gT^2}{8}$ $w_s = V \cos \alpha$ $w'_s = V \cos \alpha$ $w''_s = 0$	$X = \frac{V^2}{g}, \quad \omega = 45^\circ$ $X_s = \frac{V^2}{2g} = \frac{X}{2}$ $Y_s = \frac{V^2}{4g} = \frac{X_s}{2} = \frac{X}{4}$ $T = \sqrt{\frac{2X}{g}}, \quad v = V$ $v' = v'' = 0,70711 V$

§ 16. Hodographe — Reprenons les équations: $\frac{dx}{dt} = V \cos \alpha$, et $\frac{dy}{dt} = V \sin \alpha - gt$; elles représentent les coordonnées paramétriques de l'hodographe du mouvement d'un projectile dans le vide. Considérons la courbe définie par les équations: $x = V \cos \alpha$, et $y = V \sin \alpha - gt$, l'élimination de t entre ces équations donne l'équation de l'hodographe. Ici, l'élimination est toute faite, et l'équation de l'hodographe est: $x = V \cos \alpha$. (40)
C'est une parallèle à l'axe des y , coupant l'axe Ox au point: $x = V \cos \alpha$.

Chapitre III.

De la Résistance de l'air.

§ 17. Considérations générales — Quand un corps solide se meut dans l'air, il est obligé, pour se frayer un passage, de déplacer les molécules fluides qui se trouvent directement sur sa route et, par suite, il ébranle, partiellement du moins, le milieu qu'il traverse. Il en résulte qu'une certaine masse d'air acquiert par l'action du projectile une vitesse qu'elle ne possédait pas primitivement et que, réciproquement, le milieu exerce sur le mobile des réactions qui ont pour effet d'en altérer sans cesse la vitesse. En effet, la somme des quantités de mouvement du solide et du milieu prises ensemble et projetées sur la droite suivant laquelle se déplace le mobile, doit rester constante, puisque les diverses parties du système ne sont soumises qu'à des actions mutuelles. La résultante de toutes ces réactions est ce que l'on entend par la résistance de l'air.

§ 18. Etude théorique de la résistance de l'air — L'étude théorique des lois de la résistance de l'air est encore bien peu connue, et on peut dire que cette partie de la physique mathématique est loin de pouvoir rendre compte des faits expérimentaux. La Balistique extérieure, à qui la connaissance des lois de la résistance de l'air importe au plus haut point, doit donc demander à l'expérience toutes les données numériques dont elle a besoin.

Les premières recherches sur la résistance de l'air sont dues à Newton (1687). Faisant abstraction du mouvement communiqué au fluide ambiant, il admettait tacitement que chaque molécule d'air se trouve à l'état de repos au moment où elle est atteinte par le mobile et reçoit alors, suivant la direction de la normale à l'élément de surface qu'elle rencontre, une vitesse égale à celle que cet élément possède dans le même sens lorsqu'on assimile le choc à celui de deux corps dénués d'élasticité.

Imaginons un projectile limité extérieurement par une surface de révolution, qui soit animé d'une vitesse de translation parallèle à son axe de figure. Les actions élémentaires que l'air exerce sont symétriquement distribuées relativement à cet axe et, par suite, ont une résultante unique R , passant par le centre de gravité et agissant dans une direction opposée à celle de la vitesse de ce point.

Le projectile exerce sur l'air des réactions élémentaires dont la résultante égale et de sens contraire à la force considérée, produit pour un déplacement ds un travail $R ds$ et égal à la demi force vive gagnée par le milieu, dans le temps dt , pendant lequel la vitesse du projectile et la résistance de l'air peuvent être considérées comme constantes.

Désignons par W le volume de la masse d'air influencée par le projectile de calibre a ; Δ le poids du mètre cube d'air dans les conditions de l'expérience; w la vitesse tangentielle, k un coefficient constant. Nous avons alors:

$$R ds = \frac{1}{2} k \frac{W \Delta}{g} w^2. \quad (41)$$

$$\text{Or: } W = \pi \frac{a^2}{4} ds, \quad (42)$$

et en posant:

$$A = \frac{k}{2g}, \quad (43)$$

$$\text{on trouve } R = \frac{k}{2g} \pi \frac{a^2}{4} w^2 \Delta = A \pi \frac{a^2}{4} w^2 \Delta.$$

Telle est la formule trouvée par Newton. Elle montre que:

La résistance opposée par l'air au mouvement d'un projectile est proportionnelle à sa section droite, au carré de sa vitesse et à la densité du fluide.

La règle de Newton fut admise pendant longtemps. Aujourd'hui encore on peut se servir des formules et des tables qui ont été déduites de cette loi, lorsque la vitesse initiale du projectile ne dépasse pas 240 mètres. du Buat (1786) attira l'attention sur l'existence d'une masse d'air entraînée par le corps, d'une proue et d'une poupe fluide. Athanase Dupré (1869) appliqua la théorie de l'écoulement des fluides au calcul de la résistance que les gaz opposent au mouvement des corps qui y sont plongés, et en particulier au corps ayant une forme analogue à celle des projectiles de l'époque Sébert et Vallier essayèrent d'appliquer les théories de Dupré; mais les données expérimentales étaient insuffisantes pour permettre l'étude du contour de la poupe fluide. Les travaux de Maierovskij et de Hojel ont montré que lorsque la vitesse variait dans un large intervalle, on ne pouvait pas considérer la résistance de l'air comme proportionnelle à une certaine puissance de la vitesse. Il résulte en effet de ces recherches que, si l'on peut regarder la résistance de l'air comme sensiblement proportionnelle au carré de la vitesse pour les vitesses faibles, il n'en était plus de même pour les vitesses supérieures à 240 mètres.

Si nous remplaçons dans la formule de Newton w^2 par une certaine fonction $\varphi(w)$ de la vitesse tangentielle, la formule de la résistance de l'air prend la forme: $R = \Delta \frac{\pi a^2}{4} A \varphi(w)$. (44)

Si J représente l'accélération négative due à cette résistance, on a, en désignant par m la masse du projectile: $J = \frac{R}{m} = \frac{g}{p} R$; (45) ce qui donne: $J = g \Delta \frac{\pi a^2}{4} A \varphi(w)$, (46)

en posant: $c = A \Delta \frac{a^2}{p}$; (47) et: $g \frac{\pi}{4} \varphi(w) = F(w)$, (48)

on obtient: $J = c F(w)$ (49)

A est appelé l'indice caractéristique du projectile, c en est le coefficient balistique.

Dans ces conditions, R peut se mettre sous la forme:

$$R = \frac{p}{g} A \Delta \frac{a^2}{p} g \frac{\pi}{4} \varphi(w) = \frac{p}{g} c F(w) \quad (50)$$

Les tentatives faites pour fonder l'expression de la fonction $F(w)$ sur des bases théoriques par Otto (1866), Résol (1873), Schmidt (1878), Vallier (1885), Mala (1895), Bassani (1900) etc., n'ont pu aboutir jusqu'à présent à des énoncés qui soient d'un ordre assez général pour être appliqués en balistique; car les lois ainsi formulées ne sauraient tenir compte de tous les phénomènes accessoires à envisager, tels que le frottement de l'air parallèlement et normalement aux génératrices de la surface cylindrique, l'action des couches d'air adhérentes, l'effet de la rotation, le mode d'arrivée de l'air au contact, ses phénomènes de condensation et de rarefaction, et ce fait que la pression sur un élément varie avec sa distance à l'axe et n'est pas par suite uniforme sur toute la section droite. C'est Mach (1889) qui a établi ce point.

Un grand nombre d'expériences ont été entreprises pour déterminer la fonction $F(w)$; on a trouvé que cette fonction présente un brusque changement d'allure aux environs de:

$$w = 340 \text{ mètres}$$

à la seconde, qui est la vitesse de propagation des ondes sonores dans l'air. Diverses interprétations de ce fait curieux ont été données par Mach (1885), Indra (1886) et Gossot. Il est à présumer qu'il existe là un phénomène de résonance, analogue à ceux constatés dans d'autres circonstances, tels que par exemple, la résonance d'ondes électriques. Vieille dans une communication à l'Académie des Sciences (1900) s'exprime ainsi: « les expériences ont montré qu'un projectile se mouvant dans l'air à grande vitesse, détermine une perturbation brusque du milieu qui accompagne le projectile sous forme d'une ride formant une surface de révolution autour de son axe et dont la section méridienne se compose de deux droites symétriques et d'une courbe de raccordement. La vitesse de propagation normale de cette onde est évidemment variable en chaque point et égale à: $w \cos \alpha$, α étant l'angle de l'axe et de la normale à la section méridienne au point considéré.

« L'expérience montre que la vitesse des rides rectilignes est égale à la vitesse normale du son ; mais il est évident qu'au sommet, où $\cos \alpha = 1$, la vitesse de propagation est égale à la vitesse du projectile, laquelle avec les projectiles modernes peut s'élever jusqu'à 800, 1000 et 1200 mètres à la seconde.

« Un pareil phénomène ne peut être entretenu que par la formation d'une discontinuité dont la vitesse de propagation soit précisément égale à celle du projectile. »

Les mêmes expériences qui ont permis de déterminer la fonction $F(w)$, permettent, celle-ci supposée connue, de calculer la valeur moyenne des indices caractéristiques suivant la forme des projectiles employés. Pour les projectiles spéciaux, on peut prendre :

$$i = \sin \gamma,$$

γ étant le demi-angle ogival.

Pour terminer cette question, indiquons les diverses lois qui ont été successivement admises. Avec des vitesses ne dépassant pas 250 mètres, on peut admettre la loi de Newton, et prendre :

$$F(w) = 0,130 w^2 \quad (51)$$

Diction proposa, pour des vitesses s'étendant de 100^m environ à 340^m, la formule :

$$F(w) = 0,05 (1 + 0,011 w) w^2 \quad (52)$$

Bashforth adopta la loi :

$$F(w) = 0,00075 w^3 \quad (53)$$

Le général Maievskij pose pour la résistance de l'air :

$$F(w) = A w^n, \quad (54)$$

et il prend :	de 0 ^m à 240 ^m	$A = 0,014,$	$n = 2$
	" 240 ^m à 295 ^m	$A = 0,0000583,$	$n = 3$
	" 295 ^m à 375 ^m	$A = 0,0000000067,$	$n = 5$
	" 375 ^m à 419 ^m	$A = 0,0000583,$	$n = 3$
	" 419 ^m à 700 ^m	$A = 0,0394,$	$n = 2$

Hojel donne à $F(w)$ les formes suivantes :

de 140 ^m à 300 ^m	$F(w) = 0,033814 w^{1,5}$
" 300 ^m à 350 ^m	$F(w) = 0,00000021692 w,$
" 350 ^m à 400 ^m	$F(w) = 0,0000205524 w^{2,23}$
" 400 ^m à 500 ^m	$F(w) = 0,29932 w^{1,23}$
" 500 ^m à 700 ^m	$F(w) = 0,1868 w^{0,94}$

Pour les vitesses comprises entre 200^m et 300^m, Hélie a proposé la formule :

$$R = 0,0005651 \Delta \frac{a^2}{p} \sin \gamma w^3 \quad (55)$$

Stacci indique dans son "Cours de Balistique", que pour les vitesses w comprises entre :

0 ^m et 240 ^m	la résistance R est proportionnelle à w^2
240 ^m et 282 ^m	" " w^3
282 ^m et 343 ^m	" " w^6
343 ^m et 420 ^m	" " w^3
et supérieures à : 420 ^m	" " w^2

Piton-Bressant et avec lui la Commission de Gêvre a adopté pour $F(w)$ la forme :

$$F(w) = 0,00000224 w^4 \quad (56)$$

Cette loi a le grand avantage de permettre d'intégrer assez facilement les équations différentielles du mouvement.

La loi admise par Maievskij (1894) jusqu'à : $w = 550^m$ et prolongée par Zabudskij jusqu'à : $w = 1000^m$, a utilisé certaines expériences de Krupp.

D'après cette loi, la résistance de l'air est pour un projectile oblong de la forme normale que Krupp a adoptée, dont la section $\pi \frac{a^2}{4}$ est exprimée en mètres carrés, a étant le calibre et w la vitesse exprimée en mètres par seconde, représentée par la suite d'expressions :

$0,014 \pi \frac{\Delta}{4} \cdot \frac{\Delta}{1,206} W^2,$	de $w = 50^m$	à $w = 240^m$
$0,000\ 058\ 34 \pi \frac{\Delta}{4} \cdot \frac{\Delta}{1,206} W^3,$	" $w = 240^m$	" $w = 295^m$
$0,000\ 000\ 000\ 670\ 9 \pi \frac{\Delta}{4} \cdot \frac{\Delta}{1,206} W^5,$	" $w = 295^m$	" $w = 375^m$
$0,000\ 094\ 04 \pi \frac{\Delta}{4} \cdot \frac{\Delta}{1,206} W^5,$	" $w = 375^m$	" $w = 419^m$
$0,039\ 4 \pi \frac{\Delta}{4} \cdot \frac{\Delta}{1,206} W^2,$	" $w = 419^m$	" $w = 550^m$
$0,261\ 6 \pi \frac{\Delta}{4} \cdot \frac{\Delta}{1,206} W^2,$	" $w = 550^m$	" $w = 800^m$
$0,713 \pi \frac{\Delta}{4} \cdot \frac{\Delta}{1,206} W^2,$	" $w = 800^m$	" $w = 1000^m$

Dans ces expériences, le poids du mètre cube d'air Δ est déterminé par l'une des formules de Siacci :

$$\frac{\Delta}{1,206} = 0,3852 \frac{H_0}{273+t} - 0,144 \frac{e\sigma}{273+t} \quad \text{ou:} \quad \frac{\Delta}{1,206} = \frac{1}{\Theta} (0,3852 H_0 - 0,1444 e\sigma) \quad (57)$$

dans lesquelles H_0 désigne la hauteur barométrique réduite à 0° centigrade et évaluée en millimètres, t la température exprimée en degrés centigrades ou Θ la température absolue; e la force élastique maximum de la vapeur d'eau évaluée en millimètres et σ l'état hygrométrique de l'air.

La Table donnée ci-après indique les valeurs fournies par l'expérience de $F(w)$ et de :

$$\frac{F(w)}{w^2} = f(w), \quad (58)$$

lorsque w varie de 10^m en 10^m de $w = 0^m$ à $w = 1200^m$.

Enfin, vu l'impossibilité de représenter par une loi analytique unique la variation de la résistance de l'air avec la vitesse, et par conséquent d'obtenir l'équation explicite de la trajectoire décrite dans l'air par un projectile; de Llave, Siacci et Vallier ont cherché à exprimer tous les principaux éléments du tir à l'aide d'une vitesse auxiliaire u et de certaines fonctions de la dite vitesse définies mathématiquement.

Les fonctions de Siacci applicables au tir de plein fouet sont, en posant:

$$F(u) = B_n u^n, \quad (59)$$

$$J(u) = - \int_{\infty}^u \frac{g du}{u F(u)} = - \frac{g}{B_n} \int_{\infty}^u \frac{du}{u^{n+1}} = \frac{g}{n B_n} \cdot \frac{1}{u^n}; \quad (60)$$

pour l'inclinaison $\angle$ de la tangente à la trajectoire:

$$S(u) = - \int_{\infty}^u \frac{du}{F(u)} = - \frac{1}{B_n} \int_{\infty}^u \frac{du}{u^n} = \frac{1}{(n-1) B_n} \cdot \frac{1}{u^{n-1}}; \quad (61)$$

pour la durée τ de trajet:

$$D(u) = - \int_{\infty}^u \frac{u du}{F(u)} = - \frac{1}{B_n} \int_{\infty}^u \frac{du}{u^{n-1}} = \frac{1}{(n-2) B_n} \cdot \frac{1}{u^{n-2}}; \quad (62)$$

et pour l'abscisse x :

$$A(u) = - \int_{\infty}^u \frac{u du}{F(u)} = - \frac{g}{n B_n^2} \int_{\infty}^u \frac{du}{u^{2n-1}} = \frac{g}{n(2n-2) B_n^2} \cdot \frac{1}{u^{2n-2}}. \quad (63)$$

A l'aide des quatre fonctions balistiques $J(u)$, $S(u)$, $D(u)$ et $A(u)$, dont il a été dressé des Tables, on peut exprimer tous les éléments de la trajectoire en fonction de la variable auxiliaire u , qui est appelée vitesse auxiliaire. Malheureusement cette méthode applicable seulement pour le tir de plein fouet conduit à des calculs extrêmement longs et compliqués.

Nous lui préférons la méthode que nous allons exposer, qui s'applique au tir des canons de gros calibre et des canons à longues portées et qui de plus présente le grand avantage de pouvoir traduire à l'aide d'abaques les formules qui servent à déterminer les divers éléments du tir.

Table des valeurs des fonctions $F(w)$ et $f(w)$. — Nous donnons ci-après la Table des valeurs des fonctions $F(w)$ et $f(w)$ se rapportant à la résistance de l'air :

$$R = \frac{p}{g} c F(w), \quad \text{et} \quad f(w) = \frac{F(w)}{w^2},$$

pour les valeurs de la vitesse w comprises entre $w = 0^m$ et $w = 1200^m$,
 w variant de 10 mètres en 10 mètres.

w	F(w)	f(w)	w	F(w)	f(w)	w	F(w)	f(w)	w	F(w)	f(w)	w	F(w)	f(w)
0 ^m	0	0,1549												
10	15	0,1524	250 ^m	8 375	0,1340	490 ^m	93 783	0,3906	730 ^m	180 813	0,3393	970 ^m	287 539	0,3056
20	60	0,1499	260	9 464	0,1400	500	97 400	0,3896	740	184 760	0,3374	980	292 922	0,3050
30	133	0,1474	270	10 767	0,1477	510	101 023	0,3884	750	188 719	0,3355	990	298 440	0,3045
40	232	0,1449	280	12 364	0,1577	520	104 645	0,3870	760	192 745	0,3337	1000	304 000	0,3040
50	356	0,1424	290	14 280	0,1698	530	108 259	0,3854	770	196 784	0,3319	1010	309 600	0,3035
60	504	0,1399	300	16 740	0,1860	540	111 858	0,3836	780	200 894	0,3302	1020	315 241	0,3030
70	674	0,1375	310	19 816	0,2062	550	115 464	0,3817	790	205 017	0,3285	1030	320 922	0,3025
80	865	0,1352	320	23 470	0,2292	560	119 074	0,3797	800	209 152	0,3268	1040	326 643	0,3020
90	1 077	0,1330	330	27 770	0,2550	570	122 686	0,3776	810	213 364	0,3252	1050	332 404	0,3015
100	1 309	0,1309	340	32 460	0,2808	580	126 285	0,3754	820	217 589	0,3236	1060	338 204	0,3010
110	1 560	0,1289	350	37 216	0,3038	590	129 876	0,3731	830	221 826	0,3220	1070	344 042	0,3005
120	1 829	0,1270	360	42 090	0,3240	600	133 452	0,3707	840	226 145	0,3205	1080	350 037	0,3001
130	2 116	0,1252	370	46 573	0,3402	610	137 007	0,3682	850	230 478	0,3190	1090	356 192	0,2998
140	2 423	0,1236	380	50 872	0,3523	620	140 537	0,3656	860	234 823	0,3175	1100	362 395	0,2995
150	2 750	0,1222	390	55 045	0,3619	630	144 035	0,3629	870	239 180	0,3160	1110	368 644	0,2992
160	3 098	0,1210	400	59 200	0,3700	640	147 497	0,3601	880	243 549	0,3145	1120	375 066	0,2990
170	3 468	0,1200	410	63 206	0,3760	650	151 002	0,3574	890	247 927	0,3130	1130	381 410	0,2987
180	3 865	0,1193	420	67 208	0,3810	660	154 551	0,3548	900	252 720	0,3120	1140	387 931	0,2985
190	4 296	0,1190	430	71 039	0,3842	670	158 147	0,3523	910	257 539	0,3110	1150	394 370	0,2982
200	4 788	0,1197	440	74 923	0,3870	680	161 794	0,3499	920	262 384	0,3100	1160	400 989	0,2980
210	5 336	0,1210	450	78 773	0,3890	690	165 493	0,3476	930	267 254	0,3090	1170	407 522	0,2977
220	5 953	0,1230	460	82 587	0,3903	700	169 246	0,3454	940	272 149	0,3080	1180	414 239	0,2975
230	6 655	0,1258	470	86 372	0,3910	710	173 058	0,3433	950	277 158	0,3071	1190	420 865	0,2972
240	7 453	0,1294	480	90 155	0,3913	720	176 930	0,3413	960	282 286	0,3063	1200	427 680	0,2970

Chapitre IX.

Mouvement des projectiles dans l'air. Propriétés générales des trajectoires dans l'air.

§20. Etude du mouvement des projectiles dans l'air — En réalité, les projectiles se meuvent dans l'air atmosphérique; et, à l'action de la pesanteur vient s'ajouter celle de l'atmosphère. Un projectile est toujours un corps de révolution, dont la partie antérieure est ogivale et la partie postérieure cylindrique. Quand il sort de la bouche du canon, il est animé d'un mouvement de rotation autour de son axe provoquée par les rayures du canon. Si est bien construit, la résultante des forces développées par la résistance de l'air fait un angle très faible avec son axe, et l'on peut alors considérer le mobile comme simplement soumis à l'action de la pesanteur et à celle d'une force unique dirigée suivant son axe, celui-ci étant supposé tangent à la trajectoire.

Malheureusement, les choses ne sont pas aussi simples. La résistance de l'air sur un projectile oblong cesse d'être tangentielle dès que la direction du mouvement devient oblique à l'axe du projectile, et celui-ci prend un mouvement de précession ou un mouvement conique de son axe, autour d'une parallèle à la résistance de l'air menée par le centre de gravité. L'obliquité fait naître une

résistance secondaire, normale à la trajectoire, comprise dans le plan de résistance et dirigée du même côté que la pointe du projectile. La quantité dont le projectile s'écarte ainsi du plan de projection est la dérivation. Pendant que l'axe du projectile décrit le cône de précession, cet axe est animé lui-même d'un mouvement oscillatoire à périodes plus petites, qui constitue le mouvement de rotation.

L'obliquité fait naître aussi un couple autour du centre de gravité, et le plan de ce couple est le plan de résistance. Cette force et ce couple, qui viennent s'ajouter à la résistance tangentielle sont proportionnels à l'obliquité. La trajectoire dans l'air est donc une courbe gauche.

§21. Equations différentielles du mouvement dans le cas du problème balistique général. Soient M la position du mobile au temps t , p le poids du projectile et R la résistance de l'air, ces forces étant exprimées en kilogrammes (Fig. 6) et ψ l'inclinaison de la tangente MT sur l'horizontale MM' . La résistance R fait avec l'horizontale le même angle ψ .

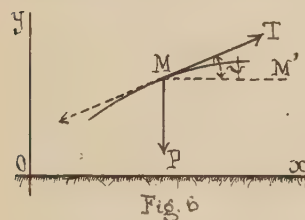


Fig. 6

Les axes de coordonnées étant les mêmes que dans le cas du vide, les équations différentielles du mouvement projeté sur ces axes sont :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -R \cos \psi, \quad \text{et} \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -p - R \sin \psi; \quad (64)$$

ou, en divisant par m :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{R}{m} \cos \psi, \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{p}{m} - \frac{R}{m} \sin \psi;$$

mais :

$$\frac{p}{g} = m, \quad \text{d'où} : \quad \frac{p}{m} = g, \quad \text{et} \quad \frac{R}{m} = J = g \Delta \frac{\pi a^2}{4p} F(w),$$

par suite :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c F(w) \cos \psi, \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - c F(w) \sin \psi. \quad (65)$$

Les deux équations différentielles du second ordre peuvent être remplacées par quatre équations différentielles du premier ordre obtenues en remplaçant $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ par leurs valeurs :

$$\frac{dx}{dt} = w \cos \psi, \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = w \sin \psi$$

et il vient :

$$\frac{d(w \cos \psi)}{dt} = -c F(w) \cos \psi, \quad \text{et} \quad \frac{d(w \sin \psi)}{dt} = -g - c F(w) \sin \psi; \quad (66)$$

les deux dernières équations donnent :

$$\cos \psi \frac{dw}{dt} - w \sin \psi \frac{d\psi}{dt} = -c F(w) \cos \psi \quad (67) \quad \text{et} \quad \sin \psi \frac{dw}{dt} + w \cos \psi \frac{d\psi}{dt} = -g - c F(w) \sin \psi. \quad (68)$$

Entre ces deux équations (67) et (68) éliminons $F(w)$; pour cela, multiplions (67) par $-\sin \psi$, et (68) par $\cos \psi$ et ajoutons membre à membre, nous obtenons :

$$w \frac{d\psi}{dt} = -g \cos \psi, \quad (69)$$

cette équation est indépendante de $F(w)$. Si nous multiplions maintenant (67) par $\cos \psi$ et (68) par $\sin \psi$ et ajoutons membre à membre, il vient :

$$\frac{dw}{dt} = -g \sin \psi - c F(w) \quad (70)$$

Éliminons enfin dt entre (67) et (69); nous trouvons :

$$dt = -\frac{w d\psi}{g \cos \psi},$$

et :

$$-\cos \psi \frac{dw}{w d\psi} + w \sin \psi \frac{d\psi}{w d\psi} = -c F(w) \cos \psi,$$

ou bien :

$$-\cos \psi \frac{dw}{d\psi} + w \sin \psi \frac{d\psi}{d\psi} = -\frac{cw}{g \cos \psi} F(w) \cos \psi$$

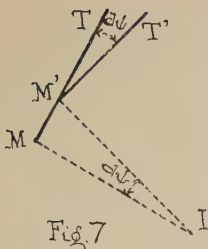
et comme :

$$\cos \psi \frac{dw}{d\psi} - w \sin \psi \frac{d\psi}{d\psi} = \frac{d(w \cos \psi)}{d\psi}, \quad \text{il en résulte} : \quad \frac{d(w \cos \psi)}{d\psi} = -\frac{c}{g} w F(w). \quad (71)$$

Généralement, pour résoudre le problème balistique général, on choisit le système suivant d'équations différentielles du premier ordre :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(w \cos \psi)}{d\psi} &= -\frac{c}{g} w F(w), & dt &= -\frac{w}{g} \cdot \frac{d\psi}{\cos \psi}, \\ dx &= w \cos \psi dt = -\frac{w^2}{g} d\psi & \text{et} & dy = w \sin \psi dt = -\frac{w^2}{g} \tan \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Soit alors ρ le rayon de courbure de la trajectoire au point M (fig. 7) pour lequel la vitesse est w , et



l'inclinaison ψ . Si M' est un point très voisin de M , leurs normales se coupent au centre de courbure I , et on a : $MM' = MI \operatorname{tg} d\psi = \rho d\psi$, et $MM' = w dt$;
d'où : $w dt = \rho d\psi$, c'est-à-dire : $\frac{d\psi}{dt} = \frac{w}{\rho}$;
l'équation (69) peut donc s'écrire : $\frac{w^2}{\rho} = -g \cos \psi$. (73)

Cette dernière équation est indépendante de la résistance de l'air R . Par suite, le rayon de courbure en un point de la trajectoire dépend de la vitesse w

et de l'inclinaison ψ , mais ne dépend pas de la résistance de l'air R . En particulier, la trajectoire dans le vide qui aurait au point M la vitesse w et l'inclinaison ψ , et la trajectoire dans l'air sont osculatrices en ce point M . Cette trajectoire du vide est appelée : parabole de vitesse au point M . C'est la courbe que décrirait le projectile si l'on supposait tout à coup la résistance de l'air annulée au point M . L'équation :

$\frac{d(w \cos \psi)}{dt} = -c F(w) \cos \psi$ ne dépend que de la gravité g . Elle définit le mouvement du projectile projeté sur l'axe des x dans le cas où, au point M la gravité serait supprimée, $\cos \psi$ garderait la même valeur, ψ serait donc constant et le mouvement serait rectiligne.

§22. Hodographe — Nous avons déjà vu que l'hodographe du mouvement parabolique d'un point matériel dans le vide était une droite verticale. Voyons maintenant quel peut être l'hodographe du mouvement le plus général dans l'air. Soient Om, Om' (fig. 8) deux rayons vecteurs très voisins de l'hodographe faisant avec l'horizontale Ox les angles ψ et $\psi + d\psi$. Le quotient $\frac{mm'}{dt}$ représente l'accélération totale et alors les deux composantes ma et mb divisées par dt représentent les accélérations J et g , de sorte que :

Fig. 8

Projetons le segment mm' sur deux perpendiculaires aux deux segments composants; nous avons d'après (69) :

$$\frac{ma}{dt} = J = c F(w), \quad \text{et} \quad \frac{mb}{dt} = g. \quad (74)$$

et d'après (67)

$$\frac{mc}{dt} = d(w \cos \psi) = -c F(w) \cos \psi dt. \quad (75)$$

En éliminant t entre ces deux équations (74) et (75), on trouve :

$$\frac{d(w \cos \psi)}{w d\psi} = \frac{c F(w)}{g}, \quad \text{et par suite :} \quad \frac{d(w \cos \psi)}{d\psi} = \frac{c}{g} w F(w), \quad (76)$$

l'équation différentielle de l'hodographe n'est autre que la première des équations (72)

L'intégration de l'équation (76) permet de ramener immédiatement à des quadratures la solution entière du problème balistique général.

En effet, ce problème est ramené à intégrer le système suivant des quatre équations différentielles simultanées (72). Mais toute la difficulté de la question consiste à intégrer l'équation (76) de l'hodographe.

Supposons qu'on puisse intégrer cette équation (76) et qu'elle donne : $w = \Phi(\psi)$, (77)

les autres équations différentielles (72) deviennent respectivement :

$$dt = -\frac{1}{g} \Phi(\psi) \frac{d\psi}{\cos \psi}, \quad dx = -\frac{1}{g} [\Phi(\psi)]^2 d\psi, \quad dy = -\frac{1}{g} [\Phi(\psi)]^2 \operatorname{tg} \psi d\psi;$$

et par de simples quadratures, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} t &= -\frac{1}{g} \int \frac{\Phi(\psi) d\psi}{\cos \psi}, & x &= -\frac{1}{g} \int [\Phi(\psi)]^2 d\psi, & y &= -\frac{1}{g} \int [\Phi(\psi)]^2 \operatorname{tg} \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Malheureusement l'équation de l'hodographe n'est généralement pas intégrable et on ne peut pas obtenir rigoureusement l'équation finie de l'hodographe.

§23. Propriétés générales des trajectoires dans l'air — L'expérience a montré que dans le tir de plein fouet et pour des portées ne dépassant pas une certaine limite assez reculée d'ailleurs, l'axe de figure d'un projectile oblong ne fait qu'un très petit angle avec la tangente à la trajectoire. En raison de la faible amplitude de cet angle, il n'est pas sans intérêt de rechercher les propriétés

essentielles du mouvement d'un projectile soumis à l'action de la pesanteur et à celle d'une résistance constamment tangentielle et exprimée du reste par une fonction quelconque de la vitesse. En effet, les résultats obtenus dans cette étude pourront très bien servir à caractériser les circonstances principales du mouvement des projectiles du moins en ce qui concerne leur déplacement estimé par rapport au plan de tir. Les propriétés résultent de la discussion des équations différentielles du mouvement :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(w \cos \psi)}{d\psi} &= \frac{cw F(w)}{g}, & dt &= -\frac{w}{g} \frac{d\psi}{\cos \psi}, \\ dx &= -\frac{w^2}{g} d\psi, & \text{et} & \quad dy = -\frac{w}{g} \tan \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

1° La trajectoire est une courbe plane. — En effet, un plan vertical passant par un élément quelconque de la trajectoire contient les deux forces qui sollicitent le projectile : la pesanteur et la résistance de l'air, ainsi que leur résultante. Le plan contient donc aussi l'élément suivant et, par suite, tous les autres éléments, c'est-à-dire la trajectoire entière. Nous pouvons d'ailleurs le démontrer analytiquement. Prenons, en effet, des axes rectangulaires dont l'un Oy sera une verticale dirigée vers le haut; les projections de la résistance seront R_x, R_y, R_z et les équations du mouvement sont :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = R_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = R_y - mg, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = R_z, \quad \left. \vphantom{\frac{d^2x}{dt^2}} \right\} \quad (80)$$

on en déduit :

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{R_x} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{R_z}, \quad (81)$$

Or la résistance ayant même direction que la vitesse : R_x et R_z sont proportionnels à $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$. La relation précédente devient donc :

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\frac{dz}{dt}}$$

ou en intégrant :

$$L \frac{dz}{dt} = L' C \frac{dx}{dt}$$

$$\text{et en passant aux nombres :} \quad \frac{dz}{dt} = C \frac{dx}{dt}$$

puis, intégrant de nouveau :

$$z = Cx + C' \quad (82)$$

C et C' désignant deux constantes. La courbe est donc plane et son plan est vertical. C'est le plan qui projette horizontalement la vitesse initiale.

2° La trajectoire tourne sa concavité vers les y négatifs. — Cette propriété résulte du mode d'action des

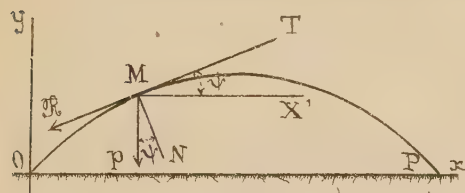


Fig. 9

deux forces MR et Mp , qui sollicitent le projectile (fig. 9); l'une retardant le mouvement suivant la tangente, l'autre tendant uniquement à abaisser le mobile au-dessous de cette droite. Si l'on désigne par ψ l'angle de la tangente avec Ox , on a donc : $d\psi < 0$, la trajectoire n'a donc pas de point d'inflexion.

3° L'inclinaison de la trajectoire va toujours en diminuant

quand l'abscisse croît. — En effet, l'équation :

$$dx = -\frac{w^2}{g} d\psi$$

montre que dx et $d\psi$ sont toujours de signes contraires; mais ψ ne peut décroître indéfiniment, en effet $\cos \psi$ ne peut changer de signe, car il devrait alors passer par zéro; or, pour : $\psi = -\frac{\pi}{2}$, tous les éléments du mouvement : vitesse, résistance et gravité seraient suivant une verticale et le projectile suivrait cette verticale.

Supposons qu'à l'origine : $\psi = \alpha > 0$. A partir de α dans le sens des x croissant, ψ commence par diminuer, il atteint la valeur zéro à laquelle correspond le sommet de la trajectoire. Le point partage la trajectoire en deux branches, l'une ascendante, l'autre descendante. En ce point, l'angle ψ change de signe et augmente en valeur absolue; mais ne peut dépasser la valeur $\frac{\pi}{2}$.

4° La vitesse horizontale va constamment en décroissant. — En effet, la troisième équation du système (76) donne :

$$d\psi = -\frac{g}{w^2} dx,$$

et par suite en remplaçant $d\psi$ par cette valeur dans la première équation de ce système, on a :

$$\frac{d(w \cos \psi)}{-\frac{g}{w^2} dx} = \frac{cw F(w)}{g}, \quad \text{d'où :} \quad d(w \cos \psi) = -\frac{c F(w)}{w} dx;$$

quand x croît, $dx > 0$, et: $c \frac{F(w)}{w} dx > 0$, donc: $d(w \cos \psi) < 0$,
il en résulte que: $w \cos \psi$ diminue quand x augmente.

5° La vitesse et le rayon de courbure pour des inclinaisons de la trajectoire égales et de sens contraires sont plus grandes dans la branche ascendante que dans la branche descendante. — Soient deux points M_1 et M_2 , l'un sur la branche ascendante, l'autre sur la branche descendante pour lesquels (fig. 10) les inclinaisons ψ_1 et ψ_2

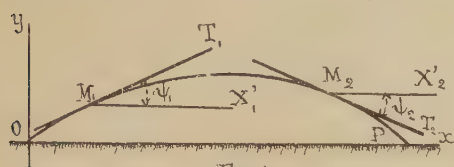


Fig. 10

de la tangente ont la même valeur absolue, w_1 et w_2 étant les vitesses du projectile en ces points. Comme la vitesse horizontale va constamment en diminuant, on a:

$$w_1 \cos \psi_1 > w_2 \cos \psi_2.$$

De plus, les rayons de courbure ρ_1 et ρ_2 en ces points ont respectivement pour valeurs:

$$\rho_1 = \frac{w_1^2}{g \cos \psi_1}, \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{w_2^2}{g \cos \psi_2};$$

il en résulte que:

$$\rho_1 > \rho_2.$$

6° Pour deux points de la trajectoire situés sur une même horizontale, la vitesse est plus grande dans la branche ascendante que dans la branche descendante, l'inclinaison est plus faible dans la branche ascendante que dans la branche descendante, et l'amplitude de la branche ascendante est plus grande que l'amplitude de la

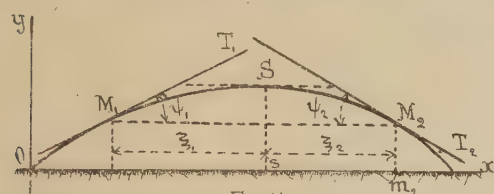


Fig. 11

branche descendante. — Soient M_1 et M_2 deux points de la trajectoire situés sur une même horizontale; le travail de la pesanteur pendant le temps que le projectile met à parcourir l'arc $M_1 M_2$ (fig. 11) est nul, et celui de la résistance de l'air est égal à:

$$-\int_0^s R ds,$$

ds étant l'élément de l'arc s de la trajectoire. Si w_1 et w_2 sont les vitesses du projectile en M_1 et M_2 , on a:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{g} (w_2^2 - w_1^2) = -\int_0^s R ds,$$

ou:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{g} (w_1^2 - w_2^2) = +\int_0^s R ds.$$

Or le second membre est positif, donc

$$w_1^2 > w_2^2, \quad \text{et par suite:}$$

$$w_1 > w_2.$$

En particulier, la vitesse au point de chute, lorsque le but est au niveau de la bouche du canon est moindre que la vitesse initiale, et on a:

$$v < V.$$

De l'équation:

$$\frac{w^2}{\rho} = g \cos \psi$$

on tire, en remplaçant ρ par sa valeur:

$$-\frac{w^2 d\psi}{ds} = g \cos \psi,$$

et par suite:

$$\rho = -\frac{ds}{d\psi} \quad g ds = -\frac{w^2 d\psi}{\cos \psi};$$

ou en multipliant les deux membres par $\sin \psi$:

$$g \sin \psi ds = -w^2 \tan \psi d\psi;$$

mais:

$$\sin \psi ds = dy,$$

donc:

$$g dy = -w^2 \tan \psi d\psi.$$

Si l'on intègre cette équation pour tout l'arc situé au-dessus d'un plan horizontal quelconque $M_1 M_2$, le premier membre sera nul puisque l'ordonnée par rapport à ce plan est nulle aux extrémités M_1 et M_2 de l'arc. En désignant par ψ_1 et ψ_2 les valeurs de l'angle ψ aux points M_1 et M_2 , on peut écrire:

ou encore successivement:

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} w^2 \tan \psi d\psi + \int_0^{\psi_2} w^2 \tan \psi d\psi = 0,$$

$$\int_{\psi_1}^0 w^2 \tan \psi d\psi - \int_{\psi_2}^0 w^2 \tan \psi d\psi = 0,$$

finalement:

$$\int_{\psi_1}^0 w^2 \tan \psi d\psi = \int_{\psi_2}^0 w^2 \tan \psi d\psi.$$

La vitesse pour des inclinaisons égales et de signes contraires étant plus petite dans la branche descendante que dans la branche ascendante, la fonction sous le signe $\int$ est dans le second membre plus petite que dans le premier membre; pour que les deux intégrales soient les mêmes, il faut donc que: $\psi_2 > \psi_1$.

En particulier, si le plan horizontal considéré passe par la bouche du canon ψ_2 est égal en valeur absolue à l'angle de chute ω et ψ_1 est l'angle de projection α ; par suite:

$$\omega > \alpha.$$

L'angle de chute est plus grand que l'angle de projection.

Enfin, soient

$$sm_1 = \xi_1, \quad \text{et} \quad sm_2 = \xi_2, \quad \text{d'où:} \quad dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} \psi};$$

on a:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \psi,$$

d'où:

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} \psi};$$

par suite, en intégrant entre les mêmes limites y et y_0 , pour les deux branches, on a:

$$\xi_1 = \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\operatorname{tg} \psi},$$

et:

$$\xi_2 = \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\operatorname{tg} \psi}.$$

branche ascendante

branche descendante.

ξ et ψ changent de signe en même temps. Or les angles ψ aux points qui se trouvent dans un même plan horizontal sont tels que le plus grand est celui qui se rapporte au point appartenant à la branche descendante et la quantité qui est sous le signe $\int$ dans l'expression de ξ_2 est plus petite que celle qui figure sous le même signe $\int$ dans l'expression de ξ_1 . Les limites de ces intégrales étant les mêmes et les éléments de la seconde plus petits que ceux correspondants de la première, il s'en suit que: $\xi_2 < \xi_1$.

En particulier, l'abscisse X_0 du point culminant de la trajectoire est supérieure à la moitié de la portée X . On a donc: $X_0 > \frac{X}{2}$.

§ 24. Étude particulière de la branche descendante — 1°. Faisons décroître ψ à partir de zéro, l'équation:

$$dt = -\frac{w}{g} \cdot \frac{d\psi}{\cos \psi} \quad \text{peut s'écrire:} \quad -\frac{d\psi}{\cos^2 \psi} = g \frac{dt}{w \cos \psi}.$$

Intégrons depuis un point quelconque pris pour origine pour lequel: $\psi = \beta$, et $t = 0$, jusqu'au point où l'inclinaison a la valeur ψ et: $t = T$.

On a:

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \psi = g \int_0^T \frac{dt}{w \cos \psi},$$

comme $w \cos \psi$ décroît toujours:

$$\int_0^T \frac{dt}{w \cos \psi} > \int_0^T \frac{dt}{V \cos \beta},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \psi > g \frac{T}{V \cos \beta}$$

Le second membre de l'inégalité croît indéfiniment avec T . Pour $T = \infty$, on a: $\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \psi = +\infty$ donc:

$$\operatorname{tg} \psi = -\infty,$$

et:

$$\lim. \psi = -\frac{\pi}{2}.$$

2°. Minimum de vitesse. — L'équation (70):

$$\frac{dw}{dt} = -g \sin \psi - cF(w)$$

peut s'écrire:

$$\frac{dw}{dt} = -[cF(w) + g \sin \psi];$$

tant que: $\sin \psi > 0$,

on a:

$$\frac{dw}{dt} < 0,$$

w décroît sur la branche ascendante, w décroît de l'origine au sommet. Au delà: $\psi < 0$,

alors: $\sin \psi < 0$.

Au sommet:

$$cF(w_0) > 0;$$

alors w continue à décroître jusqu'à ce que ψ soit

tel que:

$$\sin \psi_m = -\frac{cF(w)}{g},$$

ou quel cas:

$$\frac{dw}{dt} = 0,$$

 w passe donc par un minimum w_m tel que:

$$cF(w_m) + g \sin \psi = 0. \quad (83)$$

3°. Vitesse terminale. —

A partir du point pour lequel la vitesse est w_m , $cF(w)$ croît ainsi que $\sin \psi$; mais

w ne peut passer par un maximum pour lequel on aurait simultanément: $\frac{dw}{dt} = 0$, et $\frac{d^2w}{dt^2} < 0$,

car, si $cF(w)$ croît constamment, $g \sin \psi$ tend vers la valeur limite $-g$, pour: $\psi = -\frac{\pi}{2}$.

Si $cF(w)$ pouvait être supérieur à g , on aurait:

$$cF(w) - g > 0,$$

et $\frac{dw}{dt}$ devenant négatif, w décroîtrait, ce qui n'est pas. w tend donc vers une limite w_1 telle que:

$$cF(w_1) - g = 0,$$

c'est-à-dire telle que:

$$cF(w_1) = g. \quad (84)$$

qui est appelée vitesse terminale.

4°. Asymptote de la branche descendante. — L'équation:

$$dx = -\frac{w^2}{g} d\psi$$

intégrée donne:

$$x = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{-\frac{\pi}{2}} w^2 d\psi = \frac{1}{g} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} w^2 d\psi,$$

depuis l'origine $\psi = \alpha$ jusqu'au point pour lequel: $\psi = -\frac{\pi}{2}$. Comme w ne devient jamais infini, en désignant

par W la plus grande valeur de w dans cet intervalle, on a évidemment :

$$x < \frac{W^2}{g} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} d\psi, \quad \text{ou} \quad x < \frac{W^2}{g} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right),$$

x restant fini, la branche descendante admet une asymptote verticale définie par :

$$x = \frac{1}{g} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} w^2 d\psi. \quad (85)$$

5° Minimum du rayon de courbure — On sait que :

$$\rho = \frac{w^2}{g \cos \psi},$$

sur la branche ascendante, w diminue et $\cos \psi$ augmente donc ρ diminue constamment. Sur la branche descendante, w passe par un minimum w_m au delà duquel w croît et $\cos \psi$ diminue, donc ρ ira en croissant. Il en résulte qu'entre le sommet et le point de vitesse minimum w_m , les variations de ρ changent de sens et ρ passe par un minimum pour un certain point pour lequel la vitesse est w_2 et l'inclinaison est ψ_2 . En différentiant :

il vient :

$$d\rho = \frac{2g \cos \psi w dw + w^2 g \sin \psi d\psi}{g^2 \cos^3 \psi},$$

d'où :

$$\frac{d\rho}{d\psi} = \frac{2g \cos \psi w \frac{dw}{d\psi} + w^2 g \sin \psi}{g^2 \cos^3 \psi} = \frac{2}{g} \cdot \frac{w}{\cos \psi} \cdot \frac{dw}{d\psi} + \frac{w^2}{g} \cdot \frac{\sin \psi}{\cos^3 \psi};$$

mais :

$$\frac{dw}{d\psi} = \frac{w}{\cos \psi} \left[\frac{cF(w)}{g} + \sin \psi \right],$$

donc :

$$\frac{d\rho}{d\psi} = \frac{w^2}{g^2 \cos^3 \psi} \left[2cF(w) + 3g \sin \psi \right].$$

Le point (w_2, ψ_2) pour lequel ρ est minimum est donné par l'équation :

$$2cF(w) + 3g \sin \psi = 0 \quad (86)$$

§25. Étude de l'hodographe — L'équation différentielle de l'hodographe est :

$$\frac{d(w \cos \psi)}{d\psi} = \frac{cwF(w)}{g}, \quad (87)$$

et donne :

$$\cos \psi \frac{dw}{d\psi} - w \sin \psi = \frac{cwF(w)}{g},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dw}{d\psi} = \frac{w}{\cos \psi} \left[\frac{cF(w)}{g} + \sin \psi \right].$$

Lorsque $\psi = -\frac{\pi}{2}$, le point correspondant Z de l'hodographe est tel que la vitesse terminale

w_1 est donnée par :

$$cF(w_1) = g,$$

le point Z est le même pour tous les hodographes des trajectoires du projectile de coefficient balistique c . Si I est l'angle (fig. 12) que la tangente au point H fait avec le rayon vecteur, on a :

$$\operatorname{tg} I = \frac{w}{\frac{dw}{d\psi}} = \frac{w}{\cos \psi \left[\frac{cF(w)}{g} + \sin \psi \right]},$$

$$\operatorname{tg} I = \frac{\cos \psi}{\frac{cF(w)}{g} + \sin \psi}. \quad (88)$$

Pour $F(w) = \infty$, on a :

$$\operatorname{tg} I = 0.$$

L'hodographe admet une asymptote passant par l'origine. Pour $\psi = 0$, c'est-à-dire au sommet de la trajectoire :

$$\operatorname{tg} I = \frac{g}{cF(w_2)}.$$

Pour le point de vitesse minimum : w_m , le dénominateur est nul :

$$\operatorname{tg} I = \infty,$$

le rayon vecteur est alors normal à la courbe.

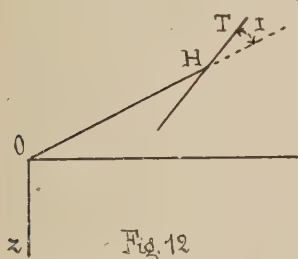
Point d'inflexion — L'équation qui définit les points d'inflexion de la courbe en coordonnées

polaires est :

$$\frac{1}{w} - \frac{d^2\left(\frac{1}{w}\right)}{d\psi^2} = 0 \quad (89)$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{w} + \frac{d}{d\psi} \left[\frac{d\left(\frac{1}{w}\right)}{d\psi} \right] = \frac{1}{w} + \frac{d}{d\psi} \left(-\frac{1}{w^2} \cdot \frac{dw}{d\psi} \right) = \frac{1}{w} \left[1 - \frac{1}{w} \cdot \frac{d^2 w}{d\psi^2} + \frac{2}{w^2} \left(\frac{dw}{d\psi} \right)^2 \right] = 0$$



comme, en général, $\frac{1}{w} \geq 0$, on peut supprimer le facteur $\frac{1}{w}$, et écrire :

mais,

$$\frac{dw}{d\psi} = \left[\frac{c}{g} F(w) + \sin \psi \right] \frac{w}{\cos \psi}.$$

On a donc :

$$\frac{1}{\cos \psi} \left[\left(\frac{cF(w)}{g} + \sin \psi \right) \left(\frac{cwF'(w)}{g} - \frac{cF(w)}{g} \right) + \cos^2 \psi \right] = 1,$$

ou bien :

$$\frac{c}{g} \left[\left(\frac{cF(w)}{g} + \sin \psi \right) (wF'(w) - F(w)) \right] = 0. \quad (90)$$

Si : $\frac{c}{g} = 0$, on est dans le cas du vide ; l'hodographe est une droite verticale, comme nous l'avons déjà vu (§ 16). On a donc un point d'inflexion continu.

Si : $wF'(w) - F(w) = 0$, c'est-à-dire : $wF'(w) = F(w)$;

on est dans le cas d'une résistance proportionnelle à la vitesse. Dans ce cas particulier, l'hodographe est une droite inclinée sur l'axe et on a encore un point d'inflexion continu.

Dans le cas général, on a : $\frac{cF(w)}{g} - \sin \psi = 0$, ou : $\frac{cF(w)}{g} = -\sin \psi$;

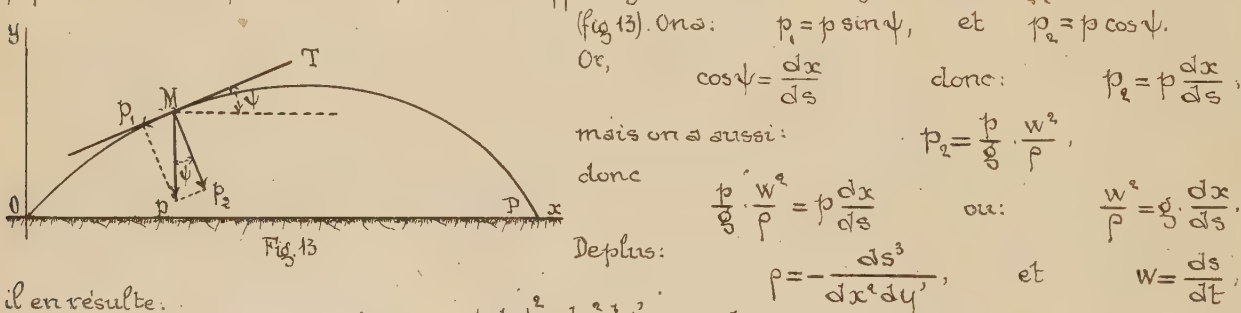
et les points d'inflexion de l'hodographe correspondent aux points pour lesquels la vitesse est minimum et égale à w_m . On a alors :

$$\frac{cF(w_m)}{g} + \sin \psi = 0 \quad (91)$$

Chapitre V.

Des diverses formules résolvant le problème de Balistique générale.

§ 26. Cas général. — Le projectile dans son trajet est soumis à deux forces : l'une est son poids p , l'autre, la résistance de l'air R . Nous supposons celle-ci dirigée suivant la tangente à la trajectoire. Le poids p peut être décomposé en deux forces, l'une p_1 dirigée suivant la tangente, l'autre p_2 suivant la normale.



(fig 13). On a : $p_1 = p \sin \psi$, et $p_2 = p \cos \psi$.

Or, $\cos \psi = \frac{dx}{ds}$ donc : $p_2 = p \frac{dx}{ds}$,

mais on a aussi : $p_2 = \frac{p}{g} \cdot \frac{w^2}{\rho}$,

donc $\frac{p}{g} \cdot \frac{w^2}{\rho} = p \frac{dx}{ds}$ ou : $\frac{w^2}{\rho} = g \frac{dx}{ds}$.

De plus : $\rho = -\frac{ds^3}{dx^2 dy}$, et $w = \frac{ds}{dt}$,

il en résulte :

$$-\left| \frac{ds}{dt} \right|^2 \cdot \frac{dx^2 dy'}{ds^3} = g \frac{dx}{ds},$$

ou encore :

$$\frac{dx^2 dy'}{dt^2} = -g dx, \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy'}{dt} = -g.$$

or y' étant fonction de x , on a :

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dt},$$

donc :

$$\frac{dy'}{dx} \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -g \quad (92)$$

De même, la résistance de l'air peut être décomposée en deux, l'une R_1 verticale, l'autre R_2 horizontale, et on a : (fig. 14)

$$R_1 = R \sin \psi, \quad \text{et} \quad R_2 = R \cos \psi = R \frac{dx}{ds};$$

l'accélération perdue par cette résistance est :

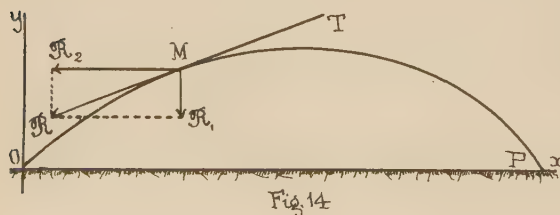
$$\frac{dx^2}{dt^2} = -R \frac{dx^2}{ds} \quad (93)$$

Les équations (92) et (93) peuvent servir de base à toutes les théories balistiques. Il suffit de déterminer R . Si entre les équations :

$$\frac{w^2}{\rho} = g \frac{dx}{ds}, \quad \text{et} \quad \rho = -\frac{ds^3}{dx^2 dy},$$

on élimine ρ , il vient :

$$w^2 = -g \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds^3}{dx^2 dy} = -g \frac{ds^2}{dx dy},$$



ce qu'on peut écrire:

$$w^2 = -g \frac{dx^2 + dy^2}{dx dy} = -g \frac{\frac{dx^2}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}, \quad \text{ou encore:} \quad w^2 = -g \frac{1 + y'^2}{y''}; \quad (94)$$

et l'équation (92) peut s'écrire:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{g}{y''},$$

ce qui donne en différentiant:

$$2 \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = g \cdot \frac{y'''}{y''^2} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad \text{d'où:} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2} g \frac{y'''}{y''^2};$$

d'ailleurs l'équation (93) donne:

$$R = -\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{ds}{dx},$$

donc:

$$R = -\frac{1}{2} g \frac{y'''}{y''^2} \cdot \frac{ds}{dx}, \quad \text{ou:} \quad \frac{R}{g} = -\frac{1}{2} \frac{y'''}{y''^2} \sqrt{1 + y'^2}. \quad (95)$$

Quand la trajectoire est connue, on peut par l'équation (94), déterminer la vitesse du projectile et par l'équation (95) la valeur de la résistance R .

1° $R = cw^n$ Soit: $R = cw^n$, l'équation (93) donne:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -cw^n \frac{dx}{ds} = -c \frac{ds^n}{dt^n} \frac{dx}{ds} = -c \frac{ds^{n-1}}{dt^n} \frac{dx}{ds}$$

Admettant que pour un arc de peu d'étendue, le rapport variable $\frac{ds}{dx}$ puisse être représenté par sa valeur moyenne θ , on peut alors poser:

$$ds = \theta dx, \quad \text{alors} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -c\theta^{n-1} \left(\frac{dx}{dt}\right)^n; \quad (96)$$

mais, dans ces conditions, R est devenu:

$$R = c \left(\frac{ds}{dt}\right)^n = c \left(\frac{ds}{dx}\right)^n \left(\frac{dx}{dt}\right)^n = c \left(\frac{ds}{dx}\right)^{n-1} \frac{ds}{dx} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^n = c\theta^{n-1} \frac{ds}{dt} \frac{dx}{dt} \left(\frac{dx}{dt}\right)^n = c\theta^{n-1} \frac{ds}{dt} \left(\frac{dx}{dt}\right)^{n+1} = c\theta^{n-1} w^n \cos^{n-1} \psi.$$

Si w' est la vitesse horizontale, on a:

$$w' = \frac{dx}{dt},$$

et l'équation (96) devient:

$$\frac{dw'}{dt} = -c\theta^{n-1} w'^n, \quad (97)$$

ce qu'on peut écrire:

$$w'^{1-n} dw' = -c\theta^{n-1} dt,$$

et en intégrant, on trouve:

$$\frac{1}{1-n} w'^{1-n} = -c\theta^{n-1} t + k, \quad \text{ou:} \quad w'^{1-n} = (n-1)c\theta^{n-1} t + (1-n)k,$$

et par suite:

$$w' = \left[(n-1)c\theta^{n-1} t + (1-n)k \right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

La constante k est déterminée par ce fait que pour $t=0$, on doit avoir:

$$w' = V \cos \alpha,$$

par conséquent:

$$k = \frac{(V \cos \alpha)^{1-n}}{1-n}$$

et alors:

$$w' = \left[(n-1)c\theta^{n-1} t + (V \cos \alpha)^{1-n} \right]^{\frac{1}{1-n}} = \left[(n-1)c\theta^{n-1} t + \frac{1}{(V \cos \alpha)^{n-1}} \right]^{\frac{1}{1-n}} = \left[\frac{1 + (n-1)c\theta^{n-1} t \cdot (V \cos \alpha)^{n-1}}{(V \cos \alpha)^{n-1}} \right]^{\frac{1}{1-n}} = \left[\frac{(V \cos \alpha)^{n-1}}{1 + (n-1)c\theta^{n-1} t (V \cos \alpha)^{n-1}} \right]^{\frac{1}{1-n}}$$

donc finalement:

$$w' = \frac{V \cos \alpha}{\left[1 + (n-1)c\theta^{n-1} t (V \cos \alpha)^{n-1} \right]^{\frac{1}{n-1}}}. \quad (98)$$

En remplaçant dt par $\frac{dx}{w'}$ dans l'équation:

$$\frac{dw'}{dt} = -c\theta^{n-1} w'^n,$$

on trouve:

$$\frac{dw'}{dx} w' = -c\theta^{n-1} w'^n, \quad \text{ou:} \quad \frac{dw'}{w'^{n-1}} = -c\theta^{n-1} dx.$$

En intégrant, on obtient:

$$\frac{1}{2-n} w'^{2-n} = -c\theta^{n-1} x + k, \quad \text{ou:} \quad w'^{2-n} = (n-2)c\theta^{n-1} x - (n-2)k.$$

Or pour $t=0$,

on doit avoir:

$$w' = V \cos \alpha,$$

par suite la constante k doit être:

$$k = \frac{1}{(n-2)V^{n-2} \cos^{n-2} \alpha},$$

alors:

$$w'^{2-n} = (n-2) \left[c\theta^{n-1} x + \frac{1}{(n-2)V^{n-2} \cos^{n-2} \alpha} \right] = (n-2) \left[\frac{(n-2)c\theta^{n-1} x (V \cos \alpha)^{n-2} + 1}{(n-2)V^{n-2} \cos^{n-2} \alpha} \right]$$

ou:

$$w' = \frac{V^{n-2} \cos^{n-2} \alpha}{1 + (n-2)c\theta^{n-1} x (V \cos \alpha)^{n-2}},$$

finalement:

$$w' = \frac{V \cos \alpha}{\left[1 + (n-2)c\theta^{n-1} x (V \cos \alpha)^{n-2} \right]^{\frac{1}{n-2}}}. \quad (99)$$

En remplaçant dans cette formule w' par: $w' = \frac{dx}{dt}$,
on trouve: $\left[1 + (n-2)c\theta^{n-1}x(V\cos\alpha)^{n-2}\right]^{\frac{1}{n-2}} dx = V\cos\alpha dt$, et en intégrant, on obtient:

$$\frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{(n-2)c\theta^{n-1}(V\cos\alpha)^{n-2}} \left[1 + (n-2)c\theta^{n-1}x(V\cos\alpha)^{n-2}\right]^{\frac{n-1}{n-2}} + k = \frac{\left[1 + (n-2)c\theta^{n-1}x(V\cos\alpha)^{n-2}\right]^{\frac{n-1}{n-2}}}{(n-1)c\theta^{n-1}(V\cos\alpha)^{n-2}} + k = Vt\cos\alpha$$

Or, pour $t=0$, on doit avoir $x=0$, par suite la constante k est donnée par:
et on trouve pour t :

$$t = \frac{\left[1 + (n-2)c\theta^{n-1}x(V\cos\alpha)^{n-2}\right]^{\frac{n-1}{n-2}} - 1}{(n-1)c\theta^{n-1}(V\cos\alpha)^{n-2}} \quad (100)$$

Si dans l'équation:

$$\frac{dy'}{dx} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{dy'}{dx} \cdot w'^2 = -g$$

on remplace w' par sa valeur (99), il vient:

$$\frac{dy'}{dx} = -\frac{g}{V^2\cos^2\alpha} \left[1 + (n-2)c\theta^{n-1}x(V\cos\alpha)^{n-2}\right]^{\frac{2}{n-2}}$$

et en intégrant:

$$y' = -\frac{g}{V^2\cos^2\alpha} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{\left[1 + (n-2)c\theta^{n-1}x(V\cos\alpha)^{n-2}\right]^{\frac{n-2}{n-2}}}{(n-2)c\theta^{n-1}(V\cos\alpha)^{n-2}} + k = -\frac{g}{V^2\cos^2\alpha} \cdot \frac{\left[1 + (n-2)c\theta^{n-1}x(V\cos\alpha)^{n-2}\right]^{\frac{n-2}{n-2}}}{nc\theta^{n-1}(V\cos\alpha)^{n-2}} + k$$

comme $y' = tg\alpha$, pour $x=0$, il vient pour la constante k :

$$k = tg\alpha + \frac{g}{V^2\cos^2\alpha} \cdot \frac{1}{nc\theta^{n-1}(V\cos\alpha)^{n-2}}$$

donc:

$$y' = tg\alpha - \frac{g \left\{ \left[1 + (n-2)c\theta^{n-1}x(V\cos\alpha)^{n-2}\right]^{\frac{n-2}{n-2}} - 1 \right\}}{nc\theta^{n-1}(V\cos\alpha)^{n-2}} \quad (101)$$

Une nouvelle intégration permet de trouver y :

$$y = xtg\alpha - \frac{g}{nc\theta^{n-1}(V\cos\alpha)^{n-2}} \cdot \frac{n-2}{2n-2} \cdot \frac{\left[1 + (n-2)c\theta^{n-1}x(V\cos\alpha)^{n-2}\right]^{\frac{2n-2}{n-2}}}{(n-2)c\theta^{n-1}(V\cos\alpha)^{n-2}} + \frac{gx}{nc\theta^{n-1}(V\cos\alpha)^{n-2}} + k,$$

ou:

$$y = xtg\alpha - \frac{g}{n(2n-2)c^2\theta^{2n-2}(V\cos\alpha)^{2n-2}} \left\{ \left[1 + (n-2)c\theta^{n-1}x(V\cos\alpha)^{n-2}\right]^{\frac{2n-2}{n-2}} - (2n-2)c\theta^{n-1}(V\cos\alpha)^{n-2}x \right\} + k$$

Or, pour $x=0$, on doit avoir $y=0$, de sorte que:

et alors:

$$k = \frac{g}{n(2n-2)c^2\theta^{2n-2}(V\cos\alpha)^{2n-2}}$$

$$y = xtg\alpha - \frac{g}{n(2n-2)c^2\theta^{2n-2}(V\cos\alpha)^{2n-2}} \left\{ \left[1 + (n-2)c\theta^{n-1}x(V\cos\alpha)^{n-2}\right]^{\frac{2n-2}{n-2}} - (2n-2)c\theta^{n-1}(V\cos\alpha)^{n-2}x - 1 \right\} \quad (102)$$

Posons:

$$(n-2)c\theta^{n-1}(V\cos\alpha)^{n-2} = h,$$

nous avons finalement:

$$y = xtg\alpha - \frac{g \left[(1+hx)^{\frac{2n-2}{n-2}} - \frac{2n-2}{n-2}hx - 1 \right]}{n(2n-2)V^2\cos^2\alpha \cdot \frac{(n-2)^2c^2\theta^{2n-2}(V\cos\alpha)^{2n-2}}{(n-2)^2}} = xtg\alpha - \frac{(n-2)^2g \left[(1+hx)^{\frac{2n-2}{n-2}} - \frac{2n-2}{n-2}hx - 1 \right]}{n(2n-2)(V\cos\alpha)^{\frac{2n-2}{n-2}}h} \quad (103)$$

Or:

$$(1+hx)^{\frac{2n-2}{n-2}} = 1 + \frac{2n-2}{n-2}hx + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{2n-2}{n-2} \left(\frac{2n-2}{n-2} - 1 \right) h^2x^2 + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{2n-2}{n-2} \left(\frac{2n-2}{n-2} - 1 \right) \left(\frac{2n-2}{n-2} - 2 \right) h^3x^3 + \dots$$

ou:

$$(1+hx)^{\frac{2n-2}{n-2}} = 1 + \frac{2n-2}{n-2}hx + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{2n-2}{n-2} \cdot \frac{n}{n-2} h^2x^2 + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{2n-2}{n-2} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \frac{2}{n-2} h^3x^3 + \dots$$

il en résulte, toutes simplifications faites:

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha} \left[1 + \frac{2}{3(n-2)}hx + \frac{1}{3.4} \cdot \frac{2(4-n)}{(n-2)^2} h^2x^2 + \dots \right]$$

ou en remplaçant h par sa valeur:

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha} \left[1 + \frac{2}{3}c\theta^{n-1}(V\cos\alpha)^{n-2}x + \frac{4-n}{6}c^2\theta^{2n-2}(V\cos\alpha)^{2n-2}x^2 + \dots \right] \quad (104)$$

Quand $y=0$, celle des deux valeurs de x qui n'est pas nulle devient la portée X , donc:

$$\frac{\sin 2\alpha}{gX} = \frac{1}{V^2} \left[1 + \frac{2}{3} c \theta^{n-1} (V \cos \alpha)^{n-2} X + \frac{4-n}{6} c^2 \theta^{2n-2} (V \cos \alpha)^{2n-4} X^2 + \dots \right]. \quad (105)$$

Comme on a :

les formules précédentes atteignent le plus haut degré de simplicité en supposant : $\theta^{n-1} \cos^{n-2} \alpha = 1$
ou : $1 < \theta < \frac{1}{\cos \alpha}$,
 $\theta = \frac{1}{\cos^{\frac{n-2}{n-1}} \alpha}$.

Dans cette hypothèse, on a successivement :

$$y' = \tan \alpha - \frac{gx}{V^2 \cos^2 \alpha} \left(1 + c V^{n-2} x + \frac{n}{n-2} c^2 V^{2n-4} x^2 + \dots \right), \quad (106) \quad y = x \tan \alpha - \frac{\frac{1}{2} g x^2}{V^2 \cos^2 \alpha} \left(1 + \frac{2}{3} c V^{n-2} x + \frac{4-n}{6} c^2 V^{2n-4} x^2 + \dots \right), \quad (107)$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{gX} = \frac{1}{V^2} \left(1 + \frac{2}{3} c V^{n-2} X + \frac{4-n}{6} c^2 V^{2n-4} X^2 + \dots \right). \quad (108)$$

Lorsqu'on prend pour variable l'inclinaison ψ de la tangente à la trajectoire, on peut ramener le problème à des quadratures. En effet, l'équation du mouvement projeté sur l'axe des x peut s'écrire :

$$\frac{d(w \cos \psi)}{dt} = -c w^n \cos \psi. \quad (109)$$

Le rayon de courbure a pour expression : $\rho = -\frac{ds}{d\psi}$, par suite,

$$\frac{w^2}{\rho} = -w \frac{ds}{dt} \times \frac{1}{\frac{ds}{d\psi}} = -w \frac{d\psi}{dt}.$$

on a donc pour équation du mouvement projeté sur la normale :

$$w \frac{d\psi}{dt} = -g \cos \psi. \quad (110)$$

En éliminant dt entre les équations (109) et (110), il vient :

$$\frac{d(w \cos \psi)}{w d\psi} = \frac{c}{g} w^n \quad \text{ou :} \quad \frac{d(w \cos \psi)}{w^{n+1} \cos^{n+1} \psi} = \frac{c}{g} \frac{d\psi}{\cos^{n+1} \psi}$$

en intégrant, on obtient :

$$\int \frac{d(w \cos \psi)}{w^{n+1} \cos^{n+1} \psi} = \frac{1}{n} \int \frac{n w^{n-1} \cos^{n-1} \psi d(w \cos \psi)}{w^{2n} \cos^{2n} \psi} = \frac{1}{n} \int \frac{d(w^n \cos^n \psi)}{w^{2n} \cos^{2n} \psi} = -\frac{1}{n} \times \frac{1}{w^n \cos^n \psi} + k$$

en prenant α et ψ pour limites de l'intégration et remarquant que pour $\psi = \alpha$, on a : $[w \cos \psi]_{\psi=\alpha} = V \cos \alpha$, il vient :

$$\frac{1}{w^n \cos^n \psi} - \frac{1}{V^n \cos^n \alpha} = -\frac{nc}{g} \int_{\alpha}^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^{n+1} \psi},$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{w^n \cos^n \psi} = \frac{1}{V^n \cos^n \alpha} + \frac{nc}{g} \int_{\alpha}^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^{n+1} \psi} = \frac{1}{V^n \cos^n \alpha} \left[1 - \frac{nc}{g} V^n \cos^n \alpha \int_{\alpha}^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^{n+1} \psi} \right].$$

On en déduit :

$$w^n = \frac{V^n \frac{\cos^n \alpha}{\cos^n \psi}}{1 - \frac{nc}{g} V^n \cos^n \alpha \int_{\alpha}^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^{n+1} \psi}}, \quad \text{finalement :} \quad w = \frac{V \frac{\cos \alpha}{\cos \psi}}{\left[1 - \frac{nc}{g} V^n \cos^n \alpha \int_{\alpha}^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^{n+1} \psi} \right]^{\frac{1}{n}}}. \quad (111)$$

la valeur de w est ainsi ramenée à une quadrature. Pour calculer t , on part de la relation :

$$dt = -\frac{1}{g} \frac{w d\psi}{\cos \psi}, \quad \text{qui donne immédiatement :} \quad t = -\frac{1}{g} \int \frac{w d\psi}{\cos \psi} \quad (112)$$

puis

$$dx = w \cos \psi dt = -\frac{w^2}{g} d\psi,$$

et :

$$dy = w \sin \psi dt = -\frac{w^2}{g} \tan \psi d\psi,$$

qui donnent par intégrations :

$$x = -\frac{1}{g} \int w^2 d\psi \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{g} \int w^2 \tan \psi d\psi \quad (113)$$

En résumé, pour :

on a en résulte :

$$w = \frac{V \cos \alpha}{\left[1 + (n-2) c \theta^{n-1} x (V \cos \alpha)^{n-2} \right]^{\frac{1}{n-2}}}, \quad t = \frac{\left[1 + (n-2) c \theta^{n-1} x (V \cos \alpha)^{n-2} \right]^{\frac{n-1}{n-2}} - 1}{(n-1) c \theta^{n-1} (V \cos \alpha)^{n-1}}, \quad y' = \tan \alpha - \frac{g \left\{ \left[1 + (n-2) c \theta^{n-1} x (V \cos \alpha)^{n-2} \right]^{\frac{n-1}{n-2}} - 1 \right\}}{n c \theta^{n-1} (V \cos \alpha)^n},$$

$$y = x \tan \alpha - \frac{\frac{1}{2} g x^2}{2 V^2 \cos^2 \alpha} \left[1 + \frac{2}{3} c \theta^{n-1} (V \cos \alpha)^{n-2} x + \frac{4-n}{6} c^2 \theta^{2n-2} (V \cos \alpha)^{2n-4} x^2 + \dots \right],$$

et enfin pour la portée :

$$\frac{\sin 2\alpha}{gX} = \frac{1}{V^2} \left[1 + \frac{2}{3} c \theta^{n-1} (V \cos \alpha)^{n-2} X + \frac{4-n}{6} c^2 \theta^{2n-2} (V \cos \alpha)^{2n-4} X^2 + \dots \right]. \quad (114)$$

Pour :

$$\theta = \frac{1}{\cos \frac{n-2}{n-1} \alpha},$$

les formules offrent le plus haut degré de simplicité et sont :

$$\left. \begin{aligned} y' &= \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x}{V^2 \cos^3 \alpha} \left(1 + c V^{n-2} x + \frac{n}{n-2} c^2 V^{2n-4} x^2 + \dots \right), & y &= x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos^3 \alpha} \left(1 + \frac{2}{3} c V^{n-2} x + \frac{4-n}{6} c^2 V^{2n-4} x^2 + \dots \right) \\ \frac{\sin 2\alpha}{g X} &= \frac{1}{V^2} \left(1 + \frac{2}{3} c V^{n-2} X + \frac{4-n}{6} c^2 V^{2n-4} X^2 + \dots \right). \end{aligned} \right\} (116)$$

§27. Cas de la résistance proportionnelle à la vitesse. — Il est intéressant de supposer la résistance proportionnelle à la vitesse, à cause de la simplicité des formules auxquelles conduit cette hypothèse. On a dans ce cas :

$$R = c w,$$

et l'équation du mouvement horizontal devient :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -c w \frac{dx}{ds}, \quad \text{ou :} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -c \frac{dx}{dt}, \quad (117)$$

et l'équation du mouvement vertical est :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -c \frac{dy}{dt} - g. \quad (118)$$

De là, il résulte que le mouvement horizontal et le mouvement vertical sont indépendants l'un de l'autre. Comme

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \alpha, \quad \text{pour } t = 0,$$

l'intégration de l'équation (117) donne :

$$\frac{dx}{dt} = V e^{-ct} \cos \alpha. \quad (119)$$

Intégrant une deuxième fois, et remarquant que : $x=0$, pour $t=0$,

$$\begin{aligned} \text{d'où :} \quad e^{-ct} &= 1 - \frac{cx}{V \cos \alpha}, & \text{et,} \quad t &= -\frac{1}{c} \operatorname{L} \left(1 - \frac{cx}{V \cos \alpha} \right). \end{aligned} \quad (120)$$

Le désignant un logarithme népérien

Substituant la valeur de e^{-ct} dans l'équation (119), on obtient :

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \alpha - cx,$$

Mettant pour $\frac{dx}{dt}$ la valeur précédente dans l'équation :

$$\frac{dy'}{dx} \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -g,$$

il vient :

$$\frac{dy'}{dx} = -\frac{g}{(V \cos \alpha - cx)^2}.$$

Intégrant en observant que pour :

$$x=0,$$

on a :

$$y' = \operatorname{tg} \alpha;$$

il vient :

$$y' = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{c} \left(\frac{1}{V \cos \alpha - cx} - \frac{1}{V \cos \alpha} \right). \quad (121)$$

Intégrant une deuxième fois, on a :

$$y = x \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{c V \cos \alpha} \right) + \frac{g}{c^2} \operatorname{L} \left(1 - \frac{cx}{V \cos \alpha} \right). \quad (122)$$

Développant en série le logarithme népérien :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{V^2 \cos^3 \alpha} \left(\frac{1}{2} + \frac{cx}{3 V \cos \alpha} + \frac{c^2 x^2}{4 V^2 \cos^3 \alpha} + \dots \right). \quad (123)$$

Quand on fait $y=0$ dans l'équation (122), celle des valeurs de x qui n'est pas nulle est la portée X . Sa valeur est donc donnée par l'équation :

$$\frac{1}{X} \operatorname{L} \left(1 - \frac{cX}{V \cos \alpha} \right) = -\frac{c}{g} \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{c V \cos \alpha} \right). \quad (124)$$

L'équation (123) donnerait :

$$\operatorname{tg} \alpha - \frac{gX}{2 V^2 \cos^3 \alpha} - \frac{cgX^2}{3 V^3 \cos^3 \alpha} - \dots = 0$$

et en multipliant par $\frac{2 \cos^2 \alpha}{gX}$,

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{gX} = \frac{\sin 2\alpha}{gX} = \frac{1}{V^2} \left(1 + \frac{2cX}{3 V \cos \alpha} + \frac{2c^2 X^2}{4 V^2 \cos^3 \alpha} + \dots \right) \quad (125)$$

On a l'abscisse du sommet en faisant $y'=0$ dans l'équation (121), ce qui donne :

$$X_s = \frac{V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g + c V \cos \alpha} = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{2(g + c V \cos \alpha)}. \quad (126)$$

Substituant cette valeur dans l'équation de la trajectoire (122), on trouve pour la flèche y_s :

$$y_s = \frac{V \sin \alpha}{c} - \frac{g}{c} L \left(1 + \frac{c}{g} V \sin \alpha \right). \quad (127)$$

On a la vitesse w_s au sommet en substituant la valeur de x_s dans l'équation:

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \alpha - cx. \quad (128)$$

On trouve ainsi:

$$w_s = \frac{V \cos \alpha}{1 + \frac{c}{g} V \sin \alpha}.$$

Remarquons que pour:

$$x = \frac{V \cos \alpha}{c}, \quad \text{on a:} \quad \frac{dx}{dt} = 0,$$

tandis que les valeurs correspondantes de y , de y et de t deviennent infinies. La courbe a donc une asymptote verticale située à une distance de l'origine O égale à $\frac{V \cos \alpha}{c}$.

En prenant pour variable indépendante l'inclinaison ψ de la tangente à la trajectoire, on obtient la vitesse en un point quelconque en faisant: $n=1$, dans la formule (111). On trouve ainsi:

$$w = \frac{V \frac{\cos \alpha}{\cos \psi}}{1 + \frac{c}{g} V \cos \alpha (\tan \alpha - \tan \psi)}. \quad (129)$$

On peut déduire de cette expression la valeur limite de la vitesse quand le projectile se rapproche de son asymptote. En effet, si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\cos \psi$, et si l'on fait ensuite: $\psi = -\frac{\pi}{2}$, on trouve: $w = \frac{g}{c}$, ou: $cw = g$. Cette limite est donc telle que la résistance de l'air est égale au poids du projectile.

L'équation:

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \alpha - cx,$$

donne la valeur de x correspondante; on a:

$$\frac{dx}{dt} = w \cos \psi = V \cos \alpha - cx, \quad (130)$$

d'où:

$$x = \frac{V \cos \alpha - w \cos \psi}{c}.$$

Les formules (120) et (122) donnent aussi respectivement:

$$t = \frac{1}{c} L \left(\frac{V \cos \alpha}{w \cos \psi} \right) = \frac{1}{cM} \log \left(\frac{V \cos \alpha}{w \cos \psi} \right), \quad (131)$$

la lettre L désignant un logarithme népérien et le symbole $\log$ un logarithme vulgaire dont M est le module, et enfin:

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{c} \left(t - \frac{x}{V \cos \alpha} \right) \quad (132)$$

Les équations (129), (130), (131) et (132) donnent la solution complète de la question.

§ 28. Cas de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

Dans ce cas, $n=2$; et les formules générales que nous avons précédemment établies ne sont pas applicables. Il faut donc

traiter à part ce cas spécial. Soit donc:

$$R = b w^2, \quad (133)$$

on a, d'après la formule (96):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} \frac{ds}{dt} = -b \frac{ds dx}{dt^2}.$$

Pour intégrer cette équation différentielle, remplaçons ds par dx , il vient alors:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -b \theta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (134)$$

mais R est devenu:

$$R = b \theta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{ds}{dx} = b \theta w^2 \cos \psi; \quad (135)$$

et comme:

$$w' = \frac{dx}{dt}, \quad \text{la relation (134) devient:} \quad \frac{dw'}{dt} = -b \theta w'^2, \quad \text{ou:} \quad w'^{-2} dw' = -b \theta dt;$$

et en intégrant:

$$-\frac{1}{w'} = -b \theta t + k, \quad \text{d'où:} \quad w' = \frac{1}{b \theta t - k};$$

or, pour $t=0$, on a: $w' = V \cos \alpha$, donc: $V \cos \alpha = -\frac{1}{k}$, ce qui donne: $k = -\frac{1}{V \cos \alpha}$;

et alors:

$$w' = \frac{1}{b \theta t + \frac{1}{V \cos \alpha}} = \frac{V \cos \alpha}{b \theta t V \cos \alpha + 1} = \frac{V \cos \alpha}{1 + b \theta t V \cos \alpha}. \quad (136)$$

Comme: $dt = \frac{dx}{w'}$, et

$$\frac{dw'}{dt} = -b \theta w'^2, \quad \text{on a:} \quad \frac{dw'}{dx} w' = -b \theta w'^2,$$

c'est-à-dire:

$$\frac{dw'}{w'} = -b \theta dx;$$

donc, en intégrant, on obtient:

$$Lw' = -b\theta x + Lk = Lke^{-b\theta x}$$

ce qui donne: $w' = ke^{-b\theta x}$

Pour $x=0$, on a: $w' = V\cos\alpha$, donc:

$$k = V\cos\alpha,$$

et alors: $w' = V\cos\alpha e^{-b\theta x}$ (137)

Remplaçons w' par $\frac{dx}{dt}$, il vient:

$$\frac{dx}{dt} = V\cos\alpha e^{-b\theta x}$$

ce qu'on peut écrire:

$$\frac{dx}{e^{-b\theta x}} = e^{b\theta x} dx = V\cos\alpha dt,$$

d'où:

$$dt = \frac{e^{b\theta x}}{V\cos\alpha} dx;$$

et en intégrant:

$$t = \frac{e^{b\theta x}}{b\theta V\cos\alpha} + k;$$

or, pour $x=0$, on a: $t=0$, donc:

$$k = -\frac{1}{b\theta V\cos\alpha},$$

et il vient:

$$t = \frac{e^{b\theta x} - 1}{b\theta V\cos\alpha}. \quad (138)$$

Portant dans:

$$\frac{dy'}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{dy'}{dx} \cdot w'^2 = -g$$

la valeur trouvée pour w' , on a:

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{g}{V^2 \cos^2 \alpha} e^{2b\theta x},$$

d'où:

$$dy' = -\frac{g}{V^2 \cos^2 \alpha} e^{2b\theta x} dx;$$

en intégrant, on obtient:

$$y' = -\frac{g}{2b\theta V^2 \cos^2 \alpha} e^{2b\theta x} + k.$$

Or, pour $x=0$, on a: $y' = \tan\alpha$, donc:

$$\tan\alpha = -\frac{g}{2b\theta V^2 \cos^2 \alpha} + k,$$

d'où:

$$k = \tan\alpha + \frac{g}{2b\theta V^2 \cos^2 \alpha};$$

et alors:

$$y' = \tan\alpha - \frac{g}{2b\theta V^2 \cos^2 \alpha} \left(e^{2b\theta x} - 1 \right). \quad (139)$$

Une nouvelle intégration donne, en remarquant que:

$$y=0, \text{ pour } x=0.$$

$$y = x \tan\alpha - \frac{g}{4b^2 \theta^2 V^2 \cos^2 \alpha} \left(e^{2b\theta x} - 2b\theta x - 1 \right). \quad (140)$$

Pour $y=0$, on trouve la portée X par la formule:

$$\sin 2\alpha = \frac{g}{2b^2 \theta^2 V^2 X} \left(e^{2b\theta X} - 2b\theta X - 1 \right),$$

ou:

$$\frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{1}{2b^2 \theta^2 X} \left(e^{2b\theta X} - 2b\theta X - 1 \right),$$

et en développant en série:

$$\frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{1}{2b^2 \theta^2 X} \left(\frac{4b^2 \theta^2 X^2}{2} + \frac{8b^3 \theta^3 X^3}{6} + \dots \right) = 1 + \frac{2}{3} b\theta X + \dots,$$

finalement:

$$\frac{\sin 2\alpha}{gX} = \frac{1}{V^2} \left(1 + \frac{2}{3} b\theta X + \dots \right). \quad (141)$$

Dans le cas particulier de:

$$\theta=1,$$

on a le groupe de formules:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2, & R &= bw^2 \cos \psi, \\ w' &= \frac{V \cos \alpha}{1 + b\theta V \cos \alpha} = V \cos \alpha e^{-b\theta x}, & t &= \frac{e^{b\theta x} - 1}{bV \cos \alpha}, \\ y' &= \tan \alpha - \frac{g}{2bV^2 \cos^2 \alpha} \left(e^{2b\theta x} - 1 \right), & y &= x \tan \alpha - \frac{g}{4b^2 V^2 \cos^2 \alpha} \left(e^{2b\theta x} - 2b\theta x - 1 \right), \\ \frac{\sin 2\alpha}{g} &= \frac{1}{V^2} \left(1 + \frac{2}{3} b\theta X + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

Tous les calculs auxquels entraîne cette méthode sont très longs et compliqués. C'est pourquoi, on ne fait pas usage des formules précédentes.

§29. Cas de la résistance proportionnelle au cube de la vitesse. — On a dans ce cas:

$n=3$, et par suite:

$$R = cw^3$$

Si l'on pose encore: $ds = \theta dx$, cette hypothèse est remplacée par la suivante:

$$R = c\theta^2 \frac{ds}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 = c\theta^2 w^3 \cos^3 \psi \quad (143)$$

On obtient les formules suivantes en faisant: $n=3$, dans les formules générales (114)

$$\left. \begin{aligned} w' &= \frac{V \cos \alpha}{(1+2c\theta^2 x V^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}} = \frac{V \cos \alpha}{1+c\theta^2 x V \cos \alpha}, & t &= \frac{(1+c\theta^2 x V \cos \alpha)^{\frac{1}{2}}-1}{2c\theta^2 V^2 \cos^2 \alpha} = \frac{x}{V \cos \alpha} \left(1 + \frac{c\theta^2 V \cos \alpha}{2} x\right), \\ y' &= \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{V^2 \cos^2 \alpha} \left(1+c\theta^2 x V \cos \alpha + \frac{c^2 \theta^4 x^2 V^2 \cos^2 \alpha}{3}\right), & y &= x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2 \alpha} \left(1 + \frac{2}{3} c\theta^2 x V \cos \alpha + \frac{1}{6} c^2 \theta^4 x^2 V^2 \cos^2 \alpha\right), \\ & & \frac{\sin 2\alpha}{gx} &= \frac{1}{V^2} + \frac{2c\theta^2 \cos \alpha}{3V} X + \frac{c^2 \theta^4 \cos^2 \alpha}{6} X^2. \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

Les formules se simplifient le plus possible, si l'on fait:

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha}} \quad (145)$$

il vient alors:

$$\left. \begin{aligned} w' &= \frac{V \cos \alpha}{1+cVx}, & t &= \frac{x}{V \cos \alpha} \left(1 + \frac{cVx}{2}\right), \\ y' &= \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{V^2 \cos^2 \alpha} \left(1+cVx + \frac{c^2 V^2 x^2}{3}\right), & y &= x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2 \alpha} \left(1 + \frac{2}{3} cVx + \frac{1}{6} c^2 V^2 x^2\right), \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

et:

$$\frac{\sin 2\alpha}{gx} = \frac{1}{V^2} + \frac{2c}{3V} X + \frac{c^2}{6} X^2.$$

§ 30. — Cas où la résistance est proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse. — On a dans ce cas: $n=4$, et par suite $R=cw^4$. Faisons toujours: $ds = \theta dx$, la projection horizontale du mouvement devient indépendante de sa projection verticale; mais l'hypothèse primitive est altérée, et remplacée par la suivante: $R = c\theta^3 \frac{ds}{dx} \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 = c\theta^3 w^4 \cos^3 \psi$. (147)

Les formules générales (114) donnent alors:

$$\left. \begin{aligned} w' &= \frac{V \cos \alpha}{(1+3c\theta^3 t V^3 \cos^3 \alpha)^{\frac{1}{3}}} = \frac{V \cos \alpha}{(1+2c\theta^3 x V^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}}, & t &= \frac{(1+2c\theta^3 x V^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}-1}{3c\theta^3 V^2 \cos^3 \alpha}, \\ y' &= \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{V^2 \cos^2 \alpha} \left(1+\theta^3 x V^2 \cos^2 \alpha\right), & y &= x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2 \alpha} \left(1 + \frac{2}{3} c\theta^3 x V^2 \cos^2 \alpha\right), \\ & & \frac{\sin 2\alpha}{gx} &= \frac{1}{V^2} \left(1 + \frac{2}{3} c\theta^3 x V^2 \cos^2 \alpha\right). \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

La trajectoire vraie est donc remplacée par une courbe du troisième degré.

Les formules atteignent le plus haut degré de simplicité, si l'on pose:

$$\theta = \frac{1}{\cos^{\frac{2}{3}} \alpha} = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos^4 \alpha}} \quad (149)$$

On a alors:

$$\left. \begin{aligned} w' &= \frac{V \cos \alpha}{\left(1+3c \frac{1}{\cos^4 \alpha} t V^3 \cos^3 \alpha\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{V \cos \alpha}{\left(1+3ct \frac{V^3}{\cos \alpha}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{V \cos \alpha}{\left(1+2c \frac{1}{\cos^4 \alpha} x V^2 \cos^2 \alpha\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{V \cos \alpha}{\left(1+2cx \frac{V^2}{\cos^2 \alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}, \\ t &= \frac{\left(1+2c \frac{1}{\cos^4 \alpha} x V^2 \cos^2 \alpha\right)^{\frac{1}{2}}-1}{3c \frac{1}{\cos^4 \alpha} V^3 \cos^3 \alpha} = \frac{\left(1+2cx \frac{V^2}{\cos^2 \alpha}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{3c \frac{V^3}{\cos \alpha}}, \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

puis:

$$\begin{aligned} y' &= \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{V^2 \cos^2 \alpha} \left(1 + \frac{1}{\cos^4 \alpha} cx V^2 \cos^2 \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{V^2 \cos^2 \alpha} \left(1 + cx \frac{V^2}{\cos^2 \alpha}\right), \\ y &= x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2 \alpha} \left(1 + \frac{2}{3} cx \frac{1}{\cos^4 \alpha} V^2 \cos^2 \alpha\right) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2 \alpha} \left(1 + \frac{2}{3} cx \frac{V^2}{\cos^2 \alpha}\right), \end{aligned}$$

et:

$$\frac{\sin 2\alpha}{gx} = \frac{1}{V^2} \left(1 + \frac{2}{3} cX \frac{1}{\cos^4 \alpha} V^2 \cos^2 \alpha\right) = \frac{1}{V^2} \left(1 + \frac{2}{3} cX \frac{V^2}{\cos^2 \alpha}\right).$$

Tels sont les différents groupes de formules qu'on peut employer pour résoudre complètement le problème balistique général suivant les diverses hypothèses concernant la résistance de l'air, c'est-à-dire suivant que:

$n=1$, $n=2$, $n=3$, ou $n=4$, dans la formule: $R=cw^n$.

Chapitre VI.

De la Trajectoire décrite par un Projectile lancé par un Canon de gros calibre et à très longues portées.

§31. — Equation de la Trajectoire. — Il résulte de ce que nous avons dit dans le chapitre précédent que pour déterminer la trajectoire d'un projectile dans l'atmosphère, il faut avoir recours à des formules conduisant à des calculs longs et très compliqués et qui encore ne peuvent être effectués que grâce à des approximations plus ou moins justifiées. Les formules ne sont d'ailleurs pas établies à l'aide de considérations purement théoriques. Chacune d'elles, établie d'après les résultats d'expériences diverses, doit nécessairement être remplacée par une autre dès que de nouvelles observations viennent modifier les conclusions auxquelles on a conduit les anciennes.

C'est ainsi que la résistance de l'air, longtemps regardée comme proportionnelle au carré de la vitesse a été ensuite représentée par une expression binôme dont l'un des termes est proportionnel au carré et l'autre au cube de la vitesse. L'insuffisance de cette dernière hypothèse a été vite reconnue.

Il nous paraît naturel de chercher si, à l'aide des données fournies par les nombreuses observations faites jusqu'à ce jour, il n'est pas permis d'établir une relation analytique aussi simple que possible entre la vitesse initiale, les caractéristiques du projectile, l'angle de projection et la portée.

Si le mouvement du projectile avait lieu dans le vide, l'équation de la trajectoire serait :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos^2 \alpha}, \quad (151)$$

en admettant encore que le projectile ne s'élève pas assez haut pour qu'il soit nécessaire d'avoir égard à la variation de la gravité. L'équation de la trajectoire dans l'atmosphère doit donc être susceptible d'être ramenée à la forme :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 \cos^2 \alpha} \left[\frac{1}{V^2} + \varphi(x) \right], \quad (152)$$

la fonction $\varphi(x)$ devant s'annuler en même temps que la densité de l'air et que l'abscisse x , et devant aussi devenir nulle quand la vitesse initiale devient infinie; car, dans ce cas, le terme $\frac{1}{V^2}$ s'annule et avec lui, l'action de la gravité; le mouvement devient alors rectiligne et l'équation doit se réduire à :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha, \quad (153)$$

ce qui ne peut avoir lieu que par l'annulation du terme $\varphi(x)$. De plus, il n'est pas besoin d'attribuer à x des valeurs autres que des valeurs positives : dès lors la fonction $\varphi(x)$ est également positive, la trajectoire étant certainement moins élevée dans l'air que dans le vide.

Lorsque l'ordonnée y devient nulle, l'équation doit donner pour x deux valeurs, l'une égale à zéro, l'autre égale à la portée X , donc :

$$\frac{\sin 2\alpha}{g X} = \frac{1}{V^2} + \varphi(X). \quad (154)$$

Si alors nous posons :

$$\varphi(X) = K X,$$

K étant un paramètre balistique, la relation entre l'angle de projection, la vitesse initiale et la portée devient :

$$\frac{\sin 2\alpha}{g X} = \frac{1}{V^2} + K X, \quad (155)$$

dès lors, quand :

$$x = X,$$

la fonction $\varphi(x)$ doit avoir une valeur égale à KX . Le moyen le plus simple de remplir la dite condition consiste à supposer :

$$\varphi(x) = K x, \quad (156)$$

ce qui revient à substituer à la trajectoire vraie, la courbe du 3^{ème} degré ayant pour équation :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V^2} + K x \right). \quad (157)$$

Cette méthode se justifie d'autant plus, pour les canons de gros calibre et à très longues portées que

Les trajectoires décrites par les projectiles lancés par ces canons se rapprochent beaucoup plus de celles décrites dans le vide sous le même angle de projection que celles obtenues dans le tir de plein fouet

§ 32. — Comparaison de la trajectoire réelle et de la parabole d'égale portée — Cherchons à comparer la trajectoire que décrit un projectile dans l'air avec celle que décrirait ce même projectile qui, lancé dans le vide, sous la même inclinaison α aurait la même portée X .

Nous allons voir que la parabole d'égale portée est constamment au-dessous de la trajectoire dans l'atmosphère. Soient, en effet,

y , l'ordonnée de la trajectoire réelle au point d'abscisse x ,

y_1 , celle de la parabole d'égale portée au point de même abscisse,

V_1 , la vitesse initiale du projectile décrivant cette parabole;

il est bien évident que :

$$V_1 < V.$$

On a d'ailleurs :

$$y_1 = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 V_1^2 \cos^2 \alpha}.$$

La fonction :

$$z = y - y_1, \quad (158)$$

a pour dérivées successives :

$$z' = y' - y_1', \quad z'' = y'' - y_1'', \quad \dots$$

or, quand on suppose la résistance de l'air dirigée suivant la tangente à la courbe, on a :

$$\frac{dy'}{dx} \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -g, \quad \text{ou :} \quad y'' \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -g;$$

donc :

$$y'' = -\frac{g}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2}.$$

D'ailleurs :

$$y_1' = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x}{V_1^2 \cos^2 \alpha}, \quad \text{et :} \quad y_1'' = -\frac{g}{V_1^2 \cos^2 \alpha},$$

par suite :

$$z'' = -\frac{g}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2} + \frac{g}{V_1^2 \cos^2 \alpha}. \quad (159)$$

Or, $\frac{dx}{dt}$, projection de la vitesse sur l'axe Ox , va constamment en décroissant quand x croît ; il en est de même de z'' . Pour $x=0$, on a :

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \alpha,$$

et puisque : $V_1 < V$, on trouve :

$$z'' = +\frac{g}{\cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V_1^2} - \frac{1}{V^2} \right) > 0. \quad (160)$$

La fonction z'' d'abord positive décroît constamment, elle finit par s'annuler, puis devient négative. Par suite, z' croît d'abord, passe par un maximum, puis décroît constamment. Or : $z'=0$, pour : $x=0$ puisque les deux trajectoires sont tangentes à l'origine O ; donc z' est d'abord positif, puis décroît pour s'annuler et reste ensuite constamment négative. La fonction z , nulle à l'origine est d'abord croissante, passe par un maximum, puis est décroissante. Elle reste donc positive jusqu'à ce qu'elle s'annule, après quoi elle est toujours négative. Ainsi z ne s'annule qu'au point de chute. Entre le point de départ et le point de chute, on a : $y > y_1$. Ceci montre que la parabole d'égale portée est constamment au-dessous de la trajectoire.

De ce qui précède, on peut immédiatement conclure que l'angle de chute de la trajectoire réelle sur passe l'angle de projection. De la relation :

$$X = \frac{V_1^2 \sin 2\alpha}{g},$$

on tire :

$$V_1^2 = \frac{g X}{\sin 2\alpha}, \quad \text{puis :}$$

$$\frac{1}{V_1^2} = \frac{\sin 2\alpha}{g X};$$

l'équation de la parabole d'égale portée peut s'écrire :

$$y_1 = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2 \sin 2\alpha}{2 g X \cos^2 \alpha}$$

ou :

$$y_1 = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2 \sin \alpha}{X \cos \alpha} = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2}{X} \operatorname{tg} \alpha$$

et finalement :

$$y_1 = x \left(1 - \frac{x}{X} \right) \operatorname{tg} \alpha \quad (161)$$

Chapitre VII.

Du Paramètre K.

§ 33. Introduction du Paramètre K — La formule permettant de calculer les portées, usitée depuis fort longtemps par la Commission de tir de Gêvre dérive de l'équation de la trajectoire:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V^2} + K x \right). \quad (162)$$

Toute portée correspondant à des conditions déterminées de tir, est obtenue en faisant: $y = 0$ dans cette équation, laquelle devient:

$$x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V^2} + K x \right) = 0. \quad (163)$$

Après suppression de la solution: $x = 0$, qui correspond à l'origine 0, on trouve:

$$\operatorname{tg} \alpha - \frac{g x}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V^2} + K x \right) = 0.$$

De cette équation on tire facilement:

x étant remplacé par la portée X .

$$\sin 2\alpha = \frac{g X}{V^2} (1 + K V^2 X), \quad (164)$$

Dans cette formule très importante figure la quantité K . Hélie considère cette quantité comme un paramètre purement empirique. Pour d'autres artilleurs la constance de K est justifiée par l'intégration approchée des équations du mouvement dans l'hypothèse d'une résistance de l'air proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse. Je considérerai la quantité K comme un Paramètre Balistique dont les lois de variation avec la vitesse initiale, la portée, l'angle de projection, le poids et la forme du projectile et le lieu d'expérience ont été contrôlées suivant l'usage introduit par la Commission de tir de Gêvre, par le calcul des trajectoires décomposées en arcs. Dans mon "Traité de Balistique graphique", j'ai indiqué les différents types de formules adoptés pour K ou mieux pour $10^{10} K$, car K est toujours une quantité très petite. Je les rappelle ci-après:

I. $10^{10} K$ est exprimé par une quantité constante.

Exemples: Canon-révolver Hotchkiss de 47 ^{mm} , _____	$p = 1,080$	$V = 452^m$	$10^{10} K = 21,10$;
" Canon de 90 ^{mm} en acier, modèle 1881, _____	$p = 8$	$V = 455$	$10^{10} K = 11,00$;
" Canon de 270 ^{mm} , modèle 1870, modifié, _____	$p = 216$	$V = 490$	$10^{10} K = 3,65$;
" Canon de 320 ^{mm} en fonte, modèle 1870, modifié, _____	$p = 345$	$V = 471$	$10^{10} K = 3,178$.

II. $10^{10} K$ est exprimé en fonction de la portée X .

Deux types de formules sont adoptés: Premier type: La fonction est de la forme: $10^{10} K = b + cX + dX^2$ (165)

Exemples: Canon de 140 ^{mm} en acier, modèle 1881, _____	$p = 30^{kg}$	$V = 590^m$	$10^{10} K = 3 + 4,7 \times 10^{-4} X - 3 \times 10^{-8} X^2$;
" Canon de 160 ^{mm} en acier, modèle 1881, n°1, lourd, _____	$p = 45$	$V = 600$	$10^{10} K = 0,914 + 7,76 \times 10^{-4} X - 4,3 \times 10^{-8} X^2$;
" Canon de 160 ^{mm} en acier, modèle 1881, n°2, léger, _____	$p = 45$	$V = 555$	$10^{10} K = 2,533 + 5,59 \times 10^{-4} X - 3,43 \times 10^{-8} X^2$;

Second type: La fonction est de la forme: $10^{10} K = b + \frac{c}{\frac{dX^2}{10^{10}}}$ (166)

Exemples: Canon de 14 ^{cm} , modèle 1870, _____	$p = 28^{kg}$	$V = 406^m$	$10^{10} K = 7,0 + \frac{2,6}{\frac{150X^2}{10^{10}}}$;
" Canon de 160 ^{mm} , modèle 1870, _____	$p = 45$	$V = 543$	$10^{10} K = 3,94 + \frac{2}{\frac{X^2}{10^{10}}}$;
" Canon de 320 ^{mm} , modèle 1870 modifié, _____	$p = 286,5$	$V = 486$	$10^{10} K = 3,0 + \frac{1,55}{\frac{50X^2}{10^{10}}}$;

III. $10^{10} K$ est exprimé en fonction de l'angle de projection α .

Cette fonction est de la forme: $10^{10} K = m \cos^n \alpha$ (167)

Exemples: Canon de 65 ^{mm} , modèle 1881, _____	$p = 2^{kg}$	$V = 346^m$	$10^{10} K = 13,15 \cos^{-2} \alpha$;
" Canon de 160 ^{mm} , modèle 1864. I. 70, _____	$p = 75$	$V = 470$	$10^{10} K = 6,04 \cos^{0,5} \alpha$;
" Canon de 270 ^{mm} , n°1, modèle 1875, _____	$p = 180$	$V = 505$	$10^{10} K = 4,42 \cos^{0,3} \alpha$.

§ 34. Détermination du Paramètre K — Il résulte des très nombreuses expériences qui ont été faites que le paramètre K s'est montré comme l'accélération correspondant à la résistance de l'air proportionnel au produit $\frac{\Delta a^2}{p} \sin \gamma$, Δ étant le poids du mètre cube d'air atmosphérique, a le calibre, p le poids du projectile et γ le demi angle ogival dudit projectile.

L'un des principaux avantages présentés par l'équation du troisième degré adoptée par la Commission de tir de Gêvre pour la trajectoire est de fournir très facilement tous les éléments du tir: la portée d'abord, puis l'angle de chute, la durée totale de trajet, les vitesses restantes, les coordonnées du sommet et enfin les corrections diverses à l'aide de formules très simples dans lesquelles entre la variable auxiliaire:

$$S = KV^2X, \quad (168)$$

dont j'ai calculé des tables lorsque j'étais ingénieur aux usines du Creusot.

Il est donc de toute importance d'étudier le paramètre K et d'indiquer comment on peut le calculer dans chaque cas, d'après les données du tir. Or K varie:

- 1° avec le calibre, le poids et la forme du projectile,
- 2° avec l'angle de projection et la vitesse initiale,
- 3° avec la latitude, l'altitude et l'état atmosphérique du lieu d'expérience.

Nous nous proposons d'étudier ces diverses variations.

Chapitre VIII.

Étude du Paramètre de forme Λ

§ 35. Variation de K avec le calibre, le poids et la forme du projectile — Nous admettons avec Hélie que le paramètre K varie proportionnellement à:

$$\frac{a^2}{p} \sin \gamma,$$

en introduisant le coefficient de réduction λ à:

$$\lambda \frac{a^2}{p} \sin \gamma.$$

Seulement γ n'est pas l'angle ogival du projectile, γ est ici un $\frac{1}{2}$ angle ogival fictif tel que $\lambda \sin \gamma$ représente l'indice de forme du projectile. Cette dernière notation tient à ce que pour les anciens projectiles dont l'ogive était assez courte, l'indice de forme était sensiblement égal au sinus du $\frac{1}{2}$ angle ogival. Nous donnons ci-dessous un tableau des valeurs de:

$$\lambda \sin 32^\circ = \lambda',$$

et de:

$$j' = \frac{1}{\lambda'}.$$

pour les demi-angles ogivaux généralement adoptés très voisins de 32° , quand la vitesse initiale V varie.

V	$\lambda \sin 32^\circ$	$\frac{1}{\lambda \sin 32^\circ}$	V	$\lambda \sin 32^\circ$	$\frac{1}{\lambda \sin 32^\circ}$	V	$\lambda \sin 32^\circ$	$\frac{1}{\lambda \sin 32^\circ}$	V	$\lambda \sin 32^\circ$	$\frac{1}{\lambda \sin 32^\circ}$
300 ^m	0,67	1,49	900 ^m	0,60	1,67	1500 ^m	0,40	2,50	2100 ^m	0,35	2,86
400	0,79	1,27	1000	0,53	1,89	1600	0,39	2,56	2200	0,34	2,94
500	0,82	1,22	1100	0,49	2,04	1700	0,38	2,63	2300	0,34	2,94
600	0,81	1,23	1200	0,46	2,17	1800	0,37	2,70	2400	0,33	3,03
700	0,77	1,30	1300	0,44	2,27	1900	0,36	2,78	2500	0,33	3,03
800	0,70	1,43	1400	0,42	2,38	2000	0,35	2,86			

Ceci fait, posons:

$$\lambda \frac{a^2}{p} \sin \gamma = \Lambda, \quad (169)$$

le paramètre Λ est appelé paramètre de forme du projectile. Les tables ci-après donnent les valeurs du paramètre Λ pour les divers canons que nous nous proposons d'étudier

Table des valeurs de Λ .

$a = 0,20$	$\frac{p}{V}$	$\lambda \sin \gamma$	70^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000571$	80^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000500$	90^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000444$	100^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000400$	110^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000364$	120^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000333$	130^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000308$
Canon de 0 ^m ,200	800 ^m	0,70	0,000400	0,000350	0,000311	0,000280	0,000255	0,000233	0,000216
	1 000	0,53	303	265	235	212	193	176	163
	1 200	0,46	263	230	204	184	167	153	142
	1 400	0,42	240	210	186	168	153	140	129
	1 600	0,39	223	195	173	156	142	130	120
	1 800	0,37	211	185	164	148	135	123	114
	2 000	0,35	200	175	155	140	127	117	108
	2 200	0,34	194	170	151	136	124	113	105
	2 400	0,33	0,000188	0,000165	0,000147	0,000132	0,000120	0,000110	0,000102
$a = 0,24$	$\frac{p}{V}$	$\lambda \sin \gamma$	140^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000411$	155^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000372$	170^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000339$	185^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000311$	200^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000288$	215^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000268$	230^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000250$
Canon de 0 ^m ,240	800 ^m	0,70	0,000288	0,000260	0,000237	0,000218	0,000202	0,000188	0,000175
	1 000	0,53	218	197	180	165	153	142	133
	1 200	0,46	189	171	156	143	132	123	115
	1 400	0,42	173	156	142	131	121	113	105
	1 600	0,39	160	145	132	121	112	105	98
	1 800	0,37	152	138	125	115	107	99	93
	2 000	0,35	144	131	119	109	101	94	88
	2 200	0,34	140	126	115	106	98	91	85
	2 400	0,33	0,000136	0,000123	0,000112	0,000103	0,000095	0,000088	0,000083
$a = 0,28$	$\frac{p}{V}$	$\lambda \sin \gamma$	200^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000392$	225^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000348$	250^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000313$	275^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000285$	300^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000261$	325^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000241$	350^{kg} $\frac{\Lambda^2}{p} = 0,000224$
Canon de 0 ^m ,280	800 ^m	0,70	0,000274	0,000244	0,000219	0,000200	0,000183	0,000169	0,000157
	1 000	0,53	208	184	166	151	138	128	119
	1 200	0,46	180	160	144	131	120	111	103
	1 400	0,42	165	146	132	120	110	101	94
	1 600	0,39	153	136	122	111	102	94	87
	1 800	0,37	145	129	116	103	97	89	83
	2 000	0,35	137	122	110	100	91	84	78
	2 200	0,34	133	118	106	97	89	82	76
	2 400	0,33	0,000129	0,000115	0,000103	0,000094	0,000086	0,000080	0,000074

Table des valeurs de Λ

$\alpha = 0,32$	$\frac{p}{V}$	$\lambda \sin \gamma$	260 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000394$	300 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000341$	340 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000301$	380 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000269$	420 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000244$	460 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000223$	500 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000205$
Canon de 0 ^m ,320	800 ^m	0,70	0,000276	0,000239	0,000211	0,000188	0,000171	0,000156	0,000144
	1 000	0,53	209	181	160	143	129	118	109
	1 200	0,46	181	157	138	124	112	103	94
	1 400	0,42	165	143	126	113	102	94	86
	1 600	0,39	154	133	117	105	95	87	80
	1 800	0,37	146	126	111	100	90	83	76
	2 000	0,35	138	119	105	94	85	78	72
	2 200	0,34	134	117	102	92	83	76	70
	2 400	0,33	0,000130	0,000114	0,000099	0,000089	0,000081	0,000074	0,000068
$\alpha = 0,36$	$\frac{p}{V}$	$\lambda \sin \gamma$	330 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000392$	390 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000332$	450 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000288$	510 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000254$	570 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000227$	630 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000206$	690 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000188$
Canon de 0 ^m ,360	800 ^m	0,70	0,000274	0,000232	0,000202	0,000178	0,000159	0,000144	0,000132
	1 000	0,53	208	176	153	135	120	109	100
	1 200	0,46	180	153	132	117	104	95	86
	1 400	0,42	165	139	121	107	95	87	79
	1 600	0,39	153	129	112	99	89	80	73
	1 800	0,37	145	123	107	94	84	76	70
	2 000	0,35	137	116	101	89	79	72	66
	2 200	0,34	133	113	98	86	77	70	64
	2 400	0,33	0,000129	0,000110	0,000095	0,000084	0,000075	0,000068	0,000062
$\alpha = 0,40$	$\frac{p}{V}$	$\lambda \sin \gamma$	420 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000381$	505 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000317$	590 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000271$	675 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000237$	760 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000211$	845 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000189$	930 ^{kg} $\frac{\lambda^2}{p} = 0,000172$
Canon de 0 ^m ,400	800 ^m	0,70	0,000267	0,000222	0,000190	0,000166	0,000148	0,000132	0,000120
	1 000	0,53	202	168	144	126	112	100	91
	1 200	0,46	175	146	125	109	97	87	79
	1 400	0,42	160	133	114	100	89	79	72
	1 600	0,39	149	124	106	92	83	74	67
	1 800	0,37	141	117	100	88	78	70	64
	2 000	0,35	133	111	95	83	74	66	60
	2 200	0,34	130	108	92	81	72	64	58
	2 400	0,33	0,000126	0,000105	0,000089	0,000078	0,000070	0,000062	0,000057

Table des valeurs de Λ .

$\alpha = 0,44$	$\frac{p}{V}$	$\lambda \sin \gamma$	540^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000359$	655^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000296$	770^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000251$	885^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000219$	1000^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000194$	1115^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000174$	1230^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000149$
Canon de 0,440 ^m	800 ^m	0,70	0,000251	0,000207	0,000176	0,000153	0,000136	0,000122	0,000104
	1000	0,53	190	157	133	116	103	092	079
	1200	0,46	165	136	115	101	089	080	069
	1400	0,42	151	124	105	092	081	073	063
	1600	0,39	140	115	098	085	076	068	058
	1800	0,37	133	110	093	081	072	064	055
	2000	0,35	126	104	088	077	068	061	052
	2200	0,34	122	101	085	074	066	059	051
	2400	0,33	0,000118	0,000098	0,000083	0,000072	0,000064	0,000057	0,000049

$\alpha = 0,48$	$\frac{p}{V}$	$\lambda \sin \gamma$	700^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000329$	850^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000271$	1000^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000230$	1150^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000200$	1300^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000177$	1450^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000159$	1600^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000144$
Canon de 0,480 ^m	800 ^m	0,70	0,000230	0,000190	0,000161	0,000140	0,000124	0,000111	0,000101
	1000	0,53	174	144	127	106	094	084	076
	1200	0,46	151	125	110	092	081	073	066
	1400	0,42	138	114	100	084	074	067	060
	1600	0,39	128	106	093	078	069	062	056
	1800	0,37	122	100	088	074	065	059	053
	2000	0,35	115	095	084	070	062	056	050
	2200	0,34	112	092	081	068	060	054	049
	2400	0,33	0,000109	0,000089	0,000079	0,000066	0,000058	0,000052	0,000048

$\alpha = 0,52$	$\frac{p}{V}$	$\lambda \sin \gamma$	910^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000297$	1100^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000246$	1290^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000210$	1480^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000183$	1670^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000162$	1860^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000145$	2050^{kg} $\frac{\Delta^2}{p} = 0,000132$
Canon de 0,520 ^m	800 ^m	0,70	0,000208	0,000172	0,000147	0,000128	0,000113	0,000102	0,000092
	1000	0,53	157	130	111	097	086	077	070
	1200	0,46	137	113	097	084	075	067	061
	1400	0,42	125	103	088	077	068	061	055
	1600	0,39	116	096	082	071	063	056	051
	1800	0,37	110	091	078	068	060	054	049
	2000	0,35	104	086	074	064	057	051	046
	2200	0,34	101	084	071	062	055	049	045
	2400	0,33	0,000098	0,000081	0,000069	0,000060	0,000053	0,000048	0,000044

Chapitre IX.

Limites entre lesquelles varie le paramètre K . Angle de plus grande portée.

§36. Exposé de la question — Avant d'aller plus loin, cherchons quel peut être l'angle de plus grande portée. Considérons alors la parabole d'égalé portée dont il a déjà été question. Nous savons que l'ordonnée maximum Y'_s de cette parabole est donnée par la relation :

$$Y'_s = \frac{X \operatorname{tg} \alpha}{4}, \quad (170)$$

de laquelle on tire :

$$X = \frac{4Y'_s}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (171)$$

Remplaçons X par cette valeur dans l'équation des portées, il vient :

$$\frac{\sin 2\alpha}{4gY'_s} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{V^2} + \frac{4KY'_s}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \text{ce qu'on peut écrire :} \quad \frac{\sin^2 \alpha}{2gY'_s} = \frac{1}{V^2} + \frac{4KY'_s \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

ou encore :

$$V^2 \sin^3 \alpha = 2gY'_s \sin \alpha + 8gKY'_s V \cos \alpha,$$

d'où l'on tire :

$$K = \frac{V^2 \sin^3 \alpha - 2gY'_s \sin \alpha}{8gY'_s V \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{8gY'_s \cos \alpha} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{Y'_s} - \frac{2g}{V^2} \right),$$

ce qui donne :

$$K \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{8gY'_s} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{Y'_s} - \frac{2g}{V^2} \right); \quad (172)$$

or, quand α tend vers 90° , $\sin \alpha$ tend vers 1, et :

$$\lim_{\alpha=90^\circ} [K \cos \alpha] = \frac{1}{8gY'_s} \left(\frac{1}{Y'_s} - \frac{2g}{V^2} \right). \quad (173)$$

De plus :

$$\frac{1}{Y'_s} - \frac{2g}{V^2} > 0,$$

car :

$$Y'_s < \frac{V^2}{2g},$$

hauteur à laquelle s'élèverait le projectile s'il était lancé dans le vide suivant la verticale. Le second membre reste fini, par suite, pour $\alpha = 90^\circ$, le produit $K \cos \alpha$ reste fini et comme $\cos \alpha$ tend vers zéro, K tend vers l'infini :

$$\lim_{\alpha=90^\circ} [K] = \infty. \quad (174)$$

Enfin, quand α tend vers zéro, la portée tend aussi vers zéro, les variations de la vitesse et de la résistance de l'air deviennent très faibles, on peut alors considérer cette dernière comme constante en lui donnant pour valeur une valeur moyenne entre toutes celles qu'elle peut prendre.

Soit $\mathcal{R}$ l'accélération retardatrice correspondant à cette moyenne, l'équation du mouvement projeté sur l'horizontale devient :

$$\frac{dw'}{dt} = -\mathcal{R} \frac{dx}{ds} = -\mathcal{R} \theta, \quad (175)$$

θ étant la valeur moyenne de $\frac{dx}{ds}$, et comme :

$$w' = \frac{dx}{dt},$$

ce qui donne :

$$dt = \frac{dx}{w'},$$

il vient :

$$w' dw' = -\mathcal{R} \theta dx,$$

et en intégrant :

$$\frac{1}{2} w'^2 = -\mathcal{R} \theta x + k,$$

mais pour $\alpha = 0$, on doit avoir :

$$w' = V \cos \alpha,$$

donc :

k étant une constante ;

$$k = \frac{1}{2} V^2 \cos^2 \alpha,$$

et on a :

$$\frac{1}{2} w'^2 = \frac{1}{2} V^2 \cos^2 \alpha - \mathcal{R} \theta x$$

ou :

$$w'^2 = V^2 \cos^2 \alpha - 2\mathcal{R} \theta x,$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = V^2 \cos^2 \alpha - 2\mathcal{R} \theta x. \quad (176)$$

D'autre part, on sait que :

$$\frac{dy'}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -g, \quad (177)$$

alors :

$$\frac{dy'}{dx} (V^2 \cos^2 \alpha - 2\mathcal{R} \theta x) = -g, \quad \text{d'où :} \quad dy' = -\frac{g dx}{V^2 \cos^2 \alpha - 2\mathcal{R} \theta x} = \frac{g dx}{2\mathcal{R} \theta x - V^2 \cos^2 \alpha}$$

et en intégrant :

$$y' = g \int \frac{dx}{2\mathcal{R} \theta x - V^2 \cos^2 \alpha} = \frac{g}{2\mathcal{R} \theta} \operatorname{L} (2\mathcal{R} \theta x - V^2 \cos^2 \alpha) + k$$

or pour $x=0$, on doit avoir :

$$y' = \operatorname{tg} \alpha,$$

par suite :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{2R\theta} \operatorname{L}(-V^2 \cos^2 \alpha) + k, \quad \text{donc :} \quad k = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2R\theta} \operatorname{L}(-V^2 \cos^2 \alpha),$$

et on a :

$$y' = \frac{g}{2R\theta} \left[\operatorname{L}(2R\theta x - V^2 \cos^2 \alpha) - \operatorname{L}(-V^2 \cos^2 \alpha) \right] + \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{2R\theta} \left[\operatorname{L}(-V^2 \cos^2 \alpha + 2R\theta x) - \operatorname{L}(-V^2 \cos^2 \alpha) \right],$$

finalement :

$$y' = \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{2R\theta} \operatorname{L} \left(\frac{V^2 \cos^2 \alpha - 2R\theta x}{V^2 \cos^2 \alpha} \right) = \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{2R\theta} \operatorname{L} \left(1 - \frac{2R\theta x}{V^2 \cos^2 \alpha} \right). \quad (178)$$

Si nous développons le logarithme népérien en série, en s'arrêtant aux deux premiers termes, nous trouvons :

$$y' = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{\cos^2 \alpha} \left(\frac{x}{V^2} + \frac{R\theta x^2}{V^4 \cos^2 \alpha} \right) \quad (179)$$

et en intégrant une nouvelle fois :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{\cos^2 \alpha} \left(\frac{x^2}{2V^2} + \frac{R\theta x^3}{3V^4 \cos^2 \alpha} \right) + k = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V^2} + \frac{2R\theta x}{3V^4 \cos^2 \alpha} \right) + k$$

et comme pour $x=0$, on doit avoir : $y=0$, il en résulte que $k=0$, donc :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V^2} + \frac{2R\theta x}{3V^4 \cos^2 \alpha} \right) \quad (180)$$

On obtient la portée X , en faisant $y=0$, et en supprimant la solution $x=0$, ce qui donne :

$$\frac{\sin 2\alpha}{gX} = \frac{1}{V^2} + \frac{2R\theta}{3V^4 \cos^2 \alpha} X \quad (181)$$

Quand α se rapproche de zéro, les quantités θ et $\cos \alpha$ tendent vers l'unité,

le terme $\frac{2R\theta}{3V^4 \cos^2 \alpha}$ tend vers $\frac{2}{3} \cdot \frac{R}{V^4}$, donc K tend vers $\frac{2}{3} \cdot \frac{R}{V^4}$. De plus quand $\alpha=90^\circ$, $\cos \alpha=0$, et K devient infini, donc K finit par croître.

§ 37. Angle de plus grande portée — L'angle auquel correspond la plus grande portée dépend de la relation qui existe entre K et α .

En différenciant par rapport à α la formule des portées mise sous la forme :

$$V^2 \sin 2\alpha = gX + gKV^2X^2; \quad (182)$$

on obtient :

$$2V^2 \cos 2\alpha d\alpha = g dX + gV^2X^2 dK + 2gKV^2X dX,$$

ou :

$$V^2 \left(2 \cos 2\alpha - gX^2 \frac{dK}{d\alpha} \right) = g(1 + 2KV^2X) \frac{dX}{d\alpha}. \quad (183)$$

Comme $K > 0$, les deux quantités :

$$2 \cos 2\alpha - gX^2 \frac{dK}{d\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{dX}{d\alpha}$$

sont de même signe et s'annulent en même temps ; en sorte que pour :

$$\alpha = 45^\circ,$$

les dérivées $\frac{dK}{d\alpha}$ et $\frac{dX}{d\alpha}$ sont de signes contraires.

Il en résulte que dans le voisinage de 45° , $\frac{dK}{d\alpha}$ est positif ou négatif suivant que l'angle de plus grande portée est inférieur ou supérieur à 45° .

Soient α_m l'angle de plus grande portée, X_m cette dernière et $\left(\frac{dK}{d\alpha}\right)_m$ la valeur correspondante de $\frac{dK}{d\alpha}$. La dérivée $\frac{dX}{d\alpha}$ doit être nulle pour :

$$\alpha = \alpha_m,$$

donc :

$$2 \cos 2\alpha_m - gX_m^2 \left(\frac{dK}{d\alpha} \right)_m = 0, \quad \text{et :} \quad 2 \cos 2\alpha_m = gX_m^2 \left(\frac{dK}{d\alpha} \right)_m \quad (184)$$

On voit que $\cos 2\alpha_m$ est positif ou négatif suivant que $\frac{dK}{d\alpha}$ est lui-même positif ou négatif. En d'autres termes, l'angle α_m de plus grande portée est inférieur ou supérieur à 45° suivant que pour cet angle α_m , la dérivée de K par rapport à α est positive ou négative. La dérivée $\frac{dK}{d\alpha}$ a le même signe pour l'angle de plus grande portée et pour $\alpha = 45^\circ$, de sorte que si la fonction K n'a qu'un minimum, il ne peut exister entre 45° et l'angle α_m de plus grande portée.

Nous reviendrons plus loin sur cette importante question de l'angle α_m de plus grande portée quand nous aurons mieux déterminé la fonction K .

Chapitre I

Etude de la fonction N .

§38. Variation de K avec la vitesse initiale et l'angle de projection. — Il résulte des très nombreuses expériences qui ont été faites par la Commission de tir de Gêvre que l'on peut écrire :

$$\frac{10^{10} K p}{\lambda \Delta a^2 \sin \gamma} = A + B \cos \alpha + \frac{C}{\cos \alpha} ; \quad (185)$$

dans cette formule, les coefficients A , B et C ne dépendent que de la vitesse initiale V . Le coefficient C est nécessairement positif, car c'est la limite vers laquelle converge le produit :

$$\frac{10^{10} K p}{\lambda \Delta a^2 \sin \gamma} \cos \alpha$$

lorsque l'angle de projection α se rapproche indéfiniment de 90° .

De l'équation (185), on tire :

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{10^{10} K p}{\lambda \Delta a^2 \sin \gamma} \right) = \left(-B + \frac{C}{\cos^2 \alpha} \right) \sin \alpha, \quad (186)$$

Si le coefficient B est négatif, la valeur de K est constamment croissante ; elle l'est encore si B supposé positif est numériquement inférieur à C . Mais si B , tout en étant positif est supérieur à C , la fonction K décroît tant que :

$$\cos^2 \alpha > \frac{C}{B},$$

atteint son maximum quand :

$$\cos^2 \alpha = \frac{C}{B},$$

et devient ensuite décroissante.

Il est clair que dans le voisinage du minimum, les variations de K sont très lentes et qu'en ne dépassant pas certaines limites, on peut le regarder comme constant. Soit α_m l'angle auquel correspond le minimum de K , il est défini par la relation :

$$\cos^2 \alpha_m = \frac{C}{B}, \quad (187)$$

l'angle α_m de plus grande portée étant compris entre 45° et α_m .

Si donc :

$$\alpha_m = 45^\circ,$$

ce qui a lieu quand :

$$B = 2C$$

l'angle α_m de plus grande portée est lui-même égal à 45° :

$$\alpha_m = 45^\circ.$$

Il a été reconnu que les coefficients A et B sont toujours de signes contraires et que leurs valeurs numériques sont à peu près les mêmes ; toutefois celles de B étant légèrement supérieures ; c'est pour-quoi on a été conduit à écrire la formule :

$$\frac{10^{10} K p}{\lambda \Delta a^2 \sin \gamma} = -M + M \cos \alpha + \frac{N}{\cos \alpha} = -M(1 - \cos \alpha) + \frac{N}{\cos \alpha},$$

ou :

$$\frac{10^{10} K p}{\lambda \Delta a^2 \sin \gamma} = N \sec \alpha - M(1 - \cos \alpha) = N \sec \alpha - M \sin \text{verse } \alpha, \quad (188)$$

et la valeur de α_m est donnée par la relation :

$$\cos^2 \alpha_m = \frac{N}{M}. \quad (189)$$

Nous pouvons donc adopter pour $10^{10} K$ une expression de la forme :

$$10^{10} K = \frac{\lambda \Delta a^2}{p} \sin \gamma \left(N \sec \alpha - M \sin \text{verse } \alpha \right) \quad (190)$$

Cette formule a l'avantage de ne renfermer que deux coefficients M et N , de sorte qu'il suffit de connaître la manière dont ces coefficients varient avec la vitesse initiale pour obtenir une expression générale de la fonction K . Nous pouvons encore écrire cette formule :

$$10^{10} K = \frac{\lambda \Delta a^2}{p} \sin \gamma \cdot N \left(\sec \alpha - \frac{M}{N} \sin \text{verse } \alpha \right) \quad (191)$$

Les nombreuses expériences qui ont été exécutées avec les canons de gros calibre de la marine sous des angles de projection allant jusqu'à celui de portée maximum ont montré que la valeur du rapport $\frac{M}{N}$ croît avec la vitesse et paraît converger vers une limite sensiblement égale à 2, dont elle n'est du reste pas très éloignée, quand la vitesse initiale est dans les environs de 500 mètres.

On peut donc représenter le rapport $\frac{M}{N}$ en fonction de la vitesse V par une formule de la forme :

$$\frac{M}{N} = \frac{2}{10 \left(\frac{\mu}{V} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (192)$$

et l'on reproduit très sensiblement les valeurs de $\frac{M}{N}$ fournies par l'expérience en prenant: $\mu = 272$, et $v = 8$; auquel cas la formule (192) devient:

$$\frac{M}{N} = \frac{2}{10 \left(\frac{272}{V} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (193)$$

et elle fait varier $\frac{M}{N}$ de zéro à 2.

De plus, l'expérience a fait voir que la valeur de N croît d'abord avec la vitesse, puis décroît. On sait d'ailleurs que la valeur du paramètre K converge vers zéro quand la vitesse initiale V croît indéfiniment, il doit donc en être de même de la valeur de N , puisque le rapport $\frac{M}{N}$ est toujours compris entre zéro et 2.

Hélie a étudié comment varie le produit NV et s'est conduit à adopter la formule:

$$NV = 6'460\,000 - \frac{2\,590\,000}{10^{0,0000004 \left(\frac{V}{100} \right)^{10}}} \quad (194)$$

d'après laquelle la valeur de N converge bien vers zéro quand V augmente indéfiniment.

§ 39. Variation du rapport $\frac{M}{N}$ — Le rapport $\frac{M}{N}$ est de la forme: $y = \frac{a}{b \left(\frac{c}{x} \right)^d} = \frac{a}{z} \quad (195)$

en posant:

$$z = b \left(\frac{c}{x} \right)^d, \quad \text{avec } a, b \text{ et } c \text{ tous positifs.}$$

Il y a deux cas à considérer suivant que d est impair ou pair. On obtient les tableaux de valeurs:

1° d est impair.....	x	$-\infty$	cr	-1	cr	0	cr	1	cr	c	cr	$+\infty$
	z	1	déc	$\frac{1}{b c^d}$	déc	0	$+\infty$	déc	$b c^d$	déc	b	1
	y	a	cr	$\frac{a}{b c^d}$	cr	$+\infty$	0	cr	$\frac{a}{b c^d}$	cr	$\frac{a}{b}$	a
cette fonction présente une singularité pour $x=0$;												
2° d est pair.....	x	$-\infty$	cr	-1	cr	0	cr	1	cr	c	cr	$+\infty$
	z	1	cr	$b c^d$	cr	$+\infty$	déc	$b c^d$	déc	b	déc	1
	y	a	déc	$\frac{a}{b c^d}$	déc	0	cr	$\frac{a}{b c^d}$	cr	$\frac{a}{b}$	cr	a

On obtient les courbes ci-dessous (fig. 15):

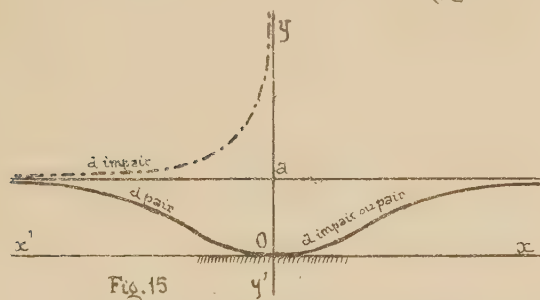


Fig. 15

la fonction:

$$y = \frac{a}{b \left(\frac{c}{x} \right)^d}$$

admet pour dérivées successives:

$$y' = \frac{a \log b \times d c^d}{b \left(\frac{c}{x} \right)^d \cdot x^{d+1}}$$

$$y'' = \frac{a \log b \times d c^d}{b \left(\frac{c}{x} \right)^d \cdot x^{2(d+1)}} \left[\log b \times d c^d - (d+1) x^d \right], \dots$$

la dérivée du $n^{\text{ème}}$ ordre est:

$$y^{(n)} = \frac{a \log b \times d c^d}{b \left(\frac{c}{x} \right)^d \cdot x^{n(d+1)}} \left[\log b \times d c^d - (d+1) x^d \right] \left[\log b \times d c^d - (d+2) x^d \right] \dots \left[\log b \times d c^d - (d+n-1) x^d \right] \quad (196)$$

§ 40. Variation du produit NV — Le produit NV est de la forme: $y = a - \frac{b}{c^{dx^e}} = a - \frac{b}{z} \quad (197)$

en posant:

$$z = c^{dx^e} \quad \text{avec } a, b, c \text{ et } d \text{ tous positifs.}$$

Il y a encore deux cas à considérer suivant que e est impair ou pair. On obtient les tableaux de valeurs:

1° e est impair.....	x	$-\infty$	cr	0	cr	$+\infty$
	z	0	cr	1	cr	$+\infty$
	y	$-\infty$	cr	$a - b$	cr	a

2^e e est pair

On obtient par suite les courbes ci-dessous. (fig. 16):

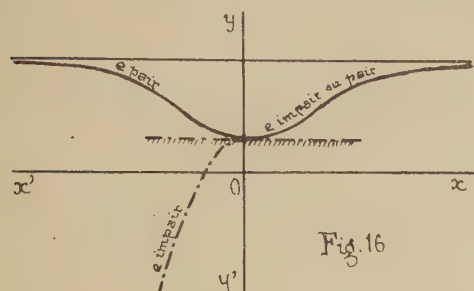


Fig. 16

La fonction:

$$y = a - \frac{b}{c dx^e}$$

admet pour dérivées successives:

$$y' = \frac{b de \log c \times x^{e-1}}{c dx^e}, \quad y'' = \frac{b de \log c \times x^{e-2}}{c dx^e} \left[(e-1) - de \log c \times x^e \right], \dots$$

et ainsi de suite, la dérivée du $n^{ème}$ ordre est:

$$y^{(n)} = \frac{b de \log c \times x^{e-n}}{c dx^e} \left[(e-1) - de \log c \times x^e \right]^{n-1}. \quad (198)$$

§41. Variation des fonctions M et N. La résolution des équations (193) et (194) donne:

$$M = \frac{2}{V \times 10^{\left(\frac{272}{V}\right)^8}} \left[6460000 - \frac{2390000}{10^{0,0000004 \left(\frac{V}{100}\right)^{10}}} \right] \quad (199) \quad \text{et} \quad N = \frac{1}{V} \left[6460000 - \frac{2390000}{10^{0,0000004 \left(\frac{V}{100}\right)^{10}}} \right] \quad (200)$$

Pour la fonction M, on a le tableau de valeurs et la courbe ci-après (fig. 17):

V	0	cr	437 ^m	cr	+ ∞
$\frac{dM}{dV}$	0	+	0	-	0
M	0	cr	Max. 27010	déc	0

M prend la valeur maximum 27010 pour: $V = 437^m$.

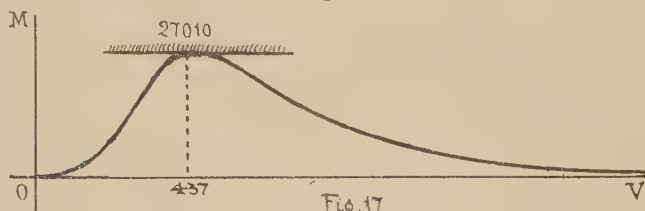


Fig. 17

Pour la fonction N, on a le tableau de valeurs et la courbe ci-après (fig. 18):

V	0	cr	350 ^m	cr	430 ^m	cr	+ ∞
$\frac{dN}{dV}$	- ∞	-	0	+	0	-	- ∞
N	+ ∞	déc	min 13160	cr	Max. 14260	déc	0

N prend la valeur minimum 13160 pour: $V = 350^m$,

et la valeur maximum 14260 pour: $V = 430^m$.

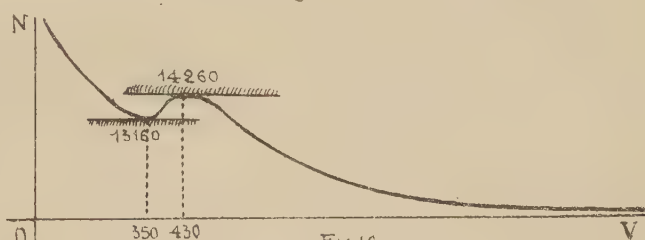


Fig. 18

Nous donnons ci-dessous un extrait des Tables que nous avons calculées au Creusot des valeurs de $\frac{M}{N}$, NV, M et N. V variant de 700^m à 2500^m, l'argument étant 100^m.

V	$\frac{M}{N}$	NV	M	N	V	$\frac{M}{N}$	NV	M	N
700 ^m	1,997 608	6 460 000	18 435	9 229	1700 ^m	1,999 998	6 460 000	7 600	3 800
800	1,999 178	6 460 000	16 143	8 075	1800	1,999 999	6 460 000	7 178	3 589
900	1,999 679	6 460 000	14 353	7 178	1900	1,999 999	6 460 000	6 800	3 400
1000	1,999 862	6 460 000	12 919	6 460	2000	1,999 999	6 460 000	6 460	3 230
1100	1,999 935	6 460 000	11 745	5 873	2100	2,000 000	6 460 000	6 152	3 076
1200	1,999 968	6 460 000	10 766	5 383	2200	2,000 000	6 460 000	5 873	2 936
1300	1,999 984	6 460 000	9 938	4 969	2300	2,000 000	6 460 000	5 617	2 808
1400	1,999 991	6 460 000	9 229	4 614	2400	2,000 000	6 460 000	5 383	2 691
1500	1,999 995	6 460 000	8 613	4 307	2500	2,000 000	6 460 000	5 168	2 584
1600	1,999 997	6 460 000	8 075	4 038					

§42. Cas particuliers — La formule (190) peut subir certaines modifications. Signalons les principales:

1°. Remarquons que pour les angles de projection: $\alpha \leq 15^\circ$, qui correspondent au tir de plein fouet, on a sensiblement: $\sec \alpha = 2 - \cos \alpha$, et comme: $\sin \text{verse } \alpha = 1 - \cos \alpha$,

on peut, dans ce cas, remplacer l'expression: $N \sec \alpha - M \sin \text{verse } \alpha$,

par la suivante: $N(2 - \cos \alpha) - M(1 - \cos \alpha) = (2N - M) + (M - N) \cos \alpha$;

et on a alors:

$$10^{10} K = \frac{\lambda \Delta a^2}{p} \sin \gamma \left[(2N - M) + (M - N) \cos \alpha \right]. \quad (201)$$

2°. Si lorsque $\alpha \leq 45^\circ$, on a de plus pour les vitesses initiales: $V \geq 700^m$,

on a sensiblement: $M = 2N$, de sorte que: $N \sec \alpha - M \sin \text{verse } \alpha$ prend la forme: $N \cos \alpha$,

et on peut écrire:

$$10^{10} K = \frac{\lambda \Delta a^2}{p} \sin \gamma \times N \cos \alpha. \quad (202)$$

3°. Quand $\alpha \leq 5^\circ$, quelle que soit la vitesse initiale V , comme $\cos \alpha$ est sensiblement égal à 1, on a simplement:

$$10^{10} K = \frac{\lambda \Delta a^2}{p} \sin \gamma \times N = \frac{\lambda \Delta a^2}{p} N \sin \gamma. \quad (203)$$

4°. Pour $\alpha = 45^\circ$, on a: $\cos 45^\circ = 0,70711$, $\sin \text{verse } 45^\circ = 0,29289$, $\sec 45^\circ = 1,41420$,
par suite: $N \sec \alpha - M \sin \text{verse } \alpha = 1,41420 N - 0,29289 M$,

et:

$$10^{10} K = \frac{\lambda \Delta a^2}{p} \sin \gamma (1,41420 N - 0,29289 M). \quad (204)$$

5°. Enfin, pour $\alpha = 45^\circ$ avec $V \geq 700^m$, on a: $M = 2N$,

alors: $N \sec \alpha - M \sin \text{verse } \alpha = N \sec \alpha - 2N \sin \text{verse } \alpha = \frac{N}{\cos \alpha} [1 - 2(1 - \cos \alpha) \cos \alpha]$,

et comme:

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{on a:} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

ce qui donne:

$$N \sec 45^\circ - M \sin \text{verse } 45^\circ = \frac{2N}{\sqrt{2}} (1 - \sqrt{2} + 1) = \frac{2N}{\sqrt{2}} (2 - \sqrt{2}) = N\sqrt{2} (2 - \sqrt{2}).$$

Prenant: $\sqrt{2} = 1,414$, on trouve:

$$N \sec 45^\circ - M \sin \text{verse } 45^\circ = 0,8286 N,$$

de sorte que la formule (190) devient:

$$10^{10} K = \frac{\lambda \Delta a^2}{p} \sin \gamma \times 0,8286 N = 0,8286 \frac{\lambda \Delta a^2}{p} N \sin \gamma. \quad (205)$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de $0,8286 N$, quand V varie de 700^m à 2500^m , l'argument étant 100^m .

V	N	0,8286 N	V	N	0,8286 N	V	N	0,8286 N
700 ^m	9 229	7 647	1 400 ^m	4 614	3 823	2 100 ^m	3 076	2 549
800	8 075	6 691	1 500	4 307	3 569	2 200	2 936	2 433
900	7 178	5 948	1 600	4 038	3 346	2 300	2 808	2 327
1 000	6 460	5 353	1 700	3 800	3 149	2 400	2 691	2 230
1 100	5 873	4 866	1 800	3 589	2 974	2 500	2 584	2 141
1 200	5 383	4 460	1 900	3 400	2 817			
1 300	4 969	4 116	2 000	3 230	2 676			

§43. Résumé — Si dans le cas général, on pose:

$$A' = N \sec \alpha - M \sin \text{verse } \alpha, \quad (206)$$

α étant l'angle de projection, on a:

$$10^{10} K = \frac{\lambda \Delta a^2}{p} \sin \gamma (N \sec \alpha - M \sin \text{verse } \alpha) = \Delta \frac{\lambda a^2}{p} \sin \gamma A' = \Delta \cdot \Delta \cdot A'. \quad (207)$$

En particulier, si $\alpha \leq 15^\circ$ avec V quelconque, on a: $A' = (2N - M) + (M - N) \cos \alpha$,

" $\alpha \leq 15^\circ$ " $V \geq 700^m$, " $A' = N \cos \alpha$,

" $\alpha \leq 5^\circ$ " V quelconque, " $A' = N$,

" $\alpha = 45^\circ$ " V quelconque, " $A' = 1,41420 N - 0,29289 M$,

" $\alpha = 45^\circ$ " $V \geq 700^m$, " $A' = 0,8286 N$.

(208)

Chapitre XI ~

De la Réfraction atmosphérique. — Théorie de Laplace.

§44. Généralités. — Quand on s'élève dans les airs, on ne rencontre pas une suite de milieux homogènes ayant chacun des dimensions finies, bien déterminées et une densité propre. On n'a à considérer qu'un seul milieu non homogène et dont la densité d'une valeur connue en chaque point varie d'un point à un autre et est une fonction en général continue des trois coordonnées x, y, z , qui fixent la position d'un point du milieu auquel il se rapporte. Les points pour lesquels la densité est la même appartiennent à une surface isospécifique et ne constituent pas un volume ou un milieu.

C'est ainsi que l'on définit aussi l'indice de réfraction astronomique pour chaque point M de l'espace. Les surfaces d'égal indice absolu de réfraction coïncident avec celles d'égale densité et remplissent le même rôle que les surfaces de séparation de deux milieux consécutifs. La lumière effectue alors sa marche suivant une courbe qui jouit de la propriété d'être parmi toutes celles qui joignent le point de départ A de la lumière au point d'arrivée B celle qui rend minimum l'intégrale : $\int n ds$, dans laquelle s représente l'arc de courbe ayant A pour origine et n l'indice absolu de réfraction du milieu pour l'extrémité de l'arc s et qui s'étend depuis le point A jusqu'au point B .

§45. Variation de la température avec l'altitude. — On admet généralement que la température de l'atmosphère décroît en moyenne de 1° centigrade par 180 mètres d'élévation ; mais ce chiffre varie en raison de la latitude du lieu d'observation, de la saison et aussi de l'heure de la journée. En France, les chiffres qui ont été trouvés dans les ascensions aérostatiques oscillent entre 130 mètres et 230 mètres pour un abaissement de 1° centigrade.

Admettant que la température de l'espace interplanétaire est le zéro absolu, soit : -273° , la fonction suivante qui lie l'abaissement de température à l'élévation z :

$$t = \frac{273z}{50\,000 + z} \quad (209)$$

paraît donner assez exactement la valeur de t pour une valeur déterminée de z . Il en résulte que si T est la température d'un point donné M sur la surface de la Terre, la température T' d'un point M' situé sur la verticale de M à la hauteur z est donnée par la formule :

$$T' = T - \frac{273z}{50\,000 + z} \quad (210)$$

La table ci-dessous donne les valeurs de t , lorsque z varie de 0^m à $60\,000^m$, l'argument étant 1000^m .

z	t	z	t	z	t	z	t	z	t	z	t	z	t
0^m	$0,0$	$9\,000^m$	$41,6$	$18\,000^m$	$72,3$	$27\,000^m$	$95,7$	$36\,000^m$	$114,3$	$45\,000^m$	$129,3$	$54\,000^m$	$141,8$
$1\,000$	$5,4$	$10\,000$	$45,5$	$19\,000$	$75,2$	$28\,000$	$98,0$	$37\,000$	$116,1$	$46\,000$	$130,8$	$55\,000$	$143,0$
$2\,000$	$10,5$	$11\,000$	$49,2$	$20\,000$	$78,0$	$29\,000$	$100,2$	$38\,000$	$117,9$	$47\,000$	$132,3$	$56\,000$	$144,2$
$3\,000$	$15,5$	$12\,000$	$52,8$	$21\,000$	$80,8$	$30\,000$	$102,4$	$39\,000$	$119,6$	$48\,000$	$133,7$	$57\,000$	$145,4$
$4\,000$	$20,2$	$13\,000$	$56,3$	$22\,000$	$83,4$	$31\,000$	$104,5$	$40\,000$	$121,3$	$49\,000$	$135,1$	$58\,000$	$146,6$
$5\,000$	$24,8$	$14\,000$	$59,7$	$23\,000$	$86,0$	$32\,000$	$106,5$	$41\,000$	$123,0$	$50\,000$	$136,5$	$59\,000$	$147,8$
$6\,000$	$29,3$	$15\,000$	$63,0$	$24\,000$	$88,5$	$33\,000$	$108,5$	$42\,000$	$124,6$	$51\,000$	$137,9$	$60\,000$	$148,9$
$7\,000$	$33,5$	$16\,000$	$66,2$	$25\,000$	$91,0$	$34\,000$	$110,5$	$43\,000$	$126,2$	$52\,000$	$139,2$		
$8\,000$	$37,7$	$17\,000$	$69,3$	$26\,000$	$93,4$	$35\,000$	$112,4$	$44\,000$	$127,8$	$53\,000$	$140,5$		

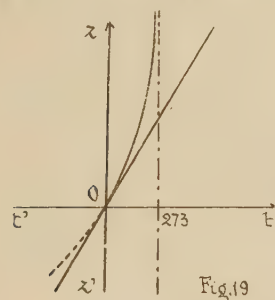
Le tableau ci-après donne les valeurs de t , lorsque z varie de 0^m à $1\,600^m$, l'argument étant 100^m .

z	t	z	t	z	t	z	t	z	t	z	t
0 ^m	0°,00	300 ^m	1°,63	600 ^m	3°,24	900 ^m	4°,83	1200 ^m	6°,40	1500 ^m	7°,95
100	0,54	400	2,17	700	3,77	1000	5,35	1300	6,92	1600	8,46
200	1,09	500	2,70	800	4,30	1100	5,88	1400	7,44		

La formule $t = \frac{273z}{50000+z}$, résolue par rapport à z donne: $z = \frac{50000t}{273-t}$, (211)

et détermine l'altitude à laquelle il faut monter pour obtenir un abaissement de température donné t. Le tableau ci-dessous donne ces altitudes quand t varie de 0° à 60° de degré en degré.

t	z	t	z	t	z	t	z	t	z	t	z	t	z
0°	0 ^m	9°	1704 ^m	18°	3529 ^m	27°	5488 ^m	36°	7594 ^m	45°	9869 ^m	54°	12329 ^m
1	184	10	1901	19	3740	28	5714	37	7838	46	10133	55	12615
2	369	11	2099	20	3952	29	5942	38	8084	47	10399	56	12903
3	556	12	2299	21	4166	30	6172	39	8332	48	10667	57	13194
4	744	13	2500	22	4382	31	6404	40	8582	49	10938	58	13488
5	933	14	2703	23	4600	32	6638	41	8835	50	11211	59	13785
6	1124	15	2907	24	4819	33	6874	42	9090	51	11486	60	14085
7	1316	16	3113	25	5040	34	7112	43	9347	52	11764		
8	1509	17	3320	26	5263	35	7352	44	9607	53	12045		



La fonction

$$t = \frac{273z}{50000+z}$$

est représentée par une hyperbole équilatère dont les asymptotes parallèles aux axes de coordonnées sont: $z = -50000$, et $t = 273$, elle passe par l'origine 0 des coordonnées (fig. 19).

Les coordonnées du centre sont: $t = 273$ et $z = -50000$, la tangente à l'origine est:

$$z = \frac{50000}{273} t = 183t$$

§46. Variation de la température avec la latitude — En général, la température moyenne annuelle T d'un lieu est fonction de la latitude φ . On remarque que pour deux points au niveau de la mer dont les latitudes diffèrent de 1° la variation de cette température moyenne est de 0°,5 centigrade. La position des lignes isothermes n'est pas fonction de la latitude seule, il y a d'autres causes perturbatrices. Les lignes isothermes remontent vers le Nord à la hauteur de l'Europe. Ceci est dû au courant du Gulf-Stream qui, débouchant de la mer des Antilles se divise en deux autres: l'un longeant l'Afrique occidentale et revenant à peu près au point de départ; l'autre s'élevant et se perdant au Nord des îles Britanniques. Un autre courant chaud à la hauteur du Brésil est aussi une cause d'irrégularité dans les lignes isothermes. Il y a aussi des courants d'air froid venant des pôles. Ils produisent une sinuosité aux lignes isothermes, mais en sens contraire. Aussi le Canada situé à une latitude égale à la nôtre a pour cette raison une température moyenne annuelle inférieure. Si l'on projette le globe terrestre sur le plan de l'équateur, on remarque que la température moyenne annuelle diminuant, les courbes isothermes se rétrécissent et semblent tendre vers des points limites appelés: pôles de froid.

Dans nos calculs, nous admettons la formule: $T = 35 - \frac{1}{2} \varphi$ (212)
 φ désignant la latitude du lieu exprimée en degrés et fraction décimale de degré.

Latitude φ	T	φ	T	φ	T	φ	T	Latitude φ	T
A l'équateur 0°	+35°	20°	+25°	40°	+15°	60°	+5°	80°	-5°
10	+30	30	+20	50	+10°	70	0	Aux pôles 90	-10

Le théâtre de la dernière guerre s'est principalement étendu entre les parallèles :

$$\varphi_1 = 45^\circ,$$

et

$$\varphi_2 = 55^\circ,$$

et comme nous nous proposons d'appliquer nos formules dans cette zone nous donnons ci-dessous les valeurs de T pour chaque degré de latitude de cette dite zone.

φ	T	φ	T	φ	T	φ	T	φ	T
45°	+12,5	47°	+11,5	49°	+10,5	51°	+9,5	53°	+8,5
46	+12,0	48	+11,0	50	+10,0	52	+9,0		

§47. Calcul du poids du mètre cube d'air atmosphérique aux différentes altitudes. — Le poids du mètre cube d'air atmosphérique est fonction de l'altitude, de la latitude, de la température, de la pression, de l'état hygrométrique et de quelques autres éléments secondaires tels que l'état du magnétisme terrestre, le potentiel électrique, l'intensité et la direction des vents, l'attraction des montagnes, etc..... Nous négligerons ces derniers éléments dans les calculs qui vont suivre.

§48. Formule de Saint-Robert. — Dans les "Mémoires scientifiques t. III. Hypsométrie", (Turin, Vincent Bonns, 1874), on trouve la formule suivante :

$$\Delta' = \Delta - 0,000\ 08\ z, \quad (213)$$

due à de Saint-Robert dans laquelle Δ désigne le poids du mètre cube d'air atmosphérique au niveau de la mer et Δ' le poids du mètre cube à l'altitude z . On suppose généralement : $\Delta = 1,208$

Cette formule très simple qui ne tient pas compte de la latitude ni de la température est loin d'être exacte. Elle limite l'atmosphère terrestre à 15 100 mètres, car pour cette altitude, la formule (213) donne :

$$\Delta' = 0.$$

§49. Formule de Halley. — Halley est le premier qui donna une formule permettant de déduire la différence d'altitude de deux stations de l'observation du baromètre à ces deux stations. Il supposait la température uniforme entre ces deux stations et l'air parfaitement sec. Dans ces hypothèses, si l'on imagine l'atmosphère décomposée entre les deux stations en un certain nombre n de couches d'égale épaisseur, la pression sur l'unité de surface au niveau supérieur de la même couche d'une quantité égale au poids du volume d'air ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur l'épaisseur de la couche ou d'une quantité égale à $h\Pi$, en appelant h cette épaisseur et Π le poids du mètre cube d'air dans la couche considérée. Pour exprimer cette diminution de pression en colonne de mercure, il faut multiplier par 0,760 et diviser par 10 334^{kg}, ce qui donne :

$$h\Pi \times \frac{0,760}{10\ 334} = 0,000\ 073\ 543\ h\Pi.$$

Mais si Π_0 désigne le poids du mètre cube d'air sous la pression de 0,760 de mercure et si l'on représente par H la pression sous laquelle le poids du même volume d'air est Π , on a :

$$\frac{\Pi}{\Pi_0} = \frac{H}{0,760}.$$

Cela étant, le produit : $\Pi \times 0,760$ peut être remplacé par : $\Pi_0 H$ et la diminution de pression de la partie inférieure d'une couche à sa partie supérieure est exprimée par :

$$\frac{h\Pi_0 H}{10\ 334}$$

Par suite, si $H_0, H_1, H_2, \dots, H_n$ désignent les pressions sur les surfaces consécutives séparatrices des couches

et n le nombre de celles-ci, on a successivement :

$$H_1 = H_0 - \frac{h \Pi_0 H_0}{10\,334} = H_0 \left(1 - \frac{h \Pi_0}{10\,334}\right),$$

$$H_2 = H_1 - \frac{h \Pi_0 H_1}{10\,334} = H_1 \left(1 - \frac{h \Pi_0}{10\,334}\right),$$

$$H_n = H_{n-1} - \frac{h \Pi_0 H_{n-1}}{10\,334} = H_{n-1} \left(1 - \frac{h \Pi_0}{10\,334}\right);$$

multipliant membre à membre ces égalités et supprimant les termes qui se détruisent, on obtient :

$$H_n = H_0 \left(1 - \frac{h \Pi_0}{10\,334}\right)^n. \quad (214)$$

Pour $h = 1^m$, n exprime la différence d'altitude des deux stations. Si de plus, on suppose : $\Pi_0 = 1^{\text{kg}} 299$, la relation (214) peut s'écrire :

$$\left(\frac{10\,334\,000}{10\,332\,701}\right)^n = \frac{H_0}{H_n},$$

ou en prenant les logarithmes :

$$n (\log 10\,334\,000 + \text{colog } 10\,332\,701) = \log H_0 + \text{colog } H_n,$$

ou :

$$0,000\,054\,6n = \log H_0 + \text{colog } H_n,$$

ce qui donne :

$$n = 18\,315 (\log H_0 + \text{colog } H_n). \quad (215)$$

Cette formule donne aussi :

$$\log H_n = \log H_0 - 0,000\,054\,6n \quad (216)$$

Dans le cas particulier où : $H_0 = 0,760$, et où la station inférieure est au niveau de la mer, n représente l'altitude z , et on obtient :

$$\log H_z = 7,880\,813\,6 - 0,000\,054\,6z \quad (217)$$

Cette formule ne tient pas davantage compte de la latitude, ni de la température.

§ 50. Formule de Ramond — Ramond employait la formule :

$$z = 18\,393 \left(1 + \alpha \frac{t}{2}\right) \log \frac{h}{H_z}, \quad (218)$$

dans laquelle t était la température moyenne $t_1 = \frac{t+t'}{2}$ des températures des deux stations, α le coefficient de dilatation de l'air, qu'il supposait être : $\alpha = 0,004$.

On en déduit :

$$\log H_z = \log h - 0,000\,054\,368 \frac{z}{1 + 0,004 \frac{t+t'}{2}},$$

ou :

$$\log H_z = \log h - \frac{0,000\,054\,368\,z}{1 + 0,002(t+t')}. \quad (219)$$

Dans le cas particulier où :

$$h = H_0 = 0,760,$$

et où la station inférieure est au niveau de la mer, z représente l'altitude de la station supérieure.

Cette formule ne tient pas compte de la latitude ; mais dépend de la température. En appliquant la loi indiquée (§ 45), pour la température, on obtient :

$$t^2 = t - \frac{273z}{50\,000 + z} = \frac{50\,000t + (t-273)z}{50\,000 + z},$$

on en déduit :

$$t + t' = \frac{100\,000t + (2t-273)z}{50\,000 + z},$$

et :

$$\frac{1}{1 + 0,002(t+t')} = \frac{50\,000 + z}{50\,000 + 200t + 0,001z(4t + 454)},$$

ce qui donne finalement :

$$\log H_z = 7,880\,813\,6 - \frac{0,000\,054\,368\,z(50\,000 + z)}{50\,000 + 200t + 0,001z(4t + 454)}. \quad (220)$$

§ 51. Formule de Babinet — Pour des contrées comme la France, qui sont dans le voisinage du 45°

parallèle et quand la différence des altitudes est assez faible pour qu'on puisse la négliger par rapport au rayon de la Terre, on peut faire usage de la formule de Babinet :

$$z = 32(500 + t + t') \cdot \frac{h' - H'_z}{h' + H'_z}; \quad (221)$$

les lettres ayant les mêmes significations que précédemment, h' et H'_z étant des hauteurs barométriques ramenées à la température de 0° centigrade. On en déduit :

$$(h' + H'_z)z = 32(500 + t + t')(h' - H'_z),$$

ou encore :

$$H'_z[32(500 + t + t') + z] = h'[32(500 + t + t') - z],$$

ce qui donne :

$$H'_z = h' \frac{32(500+t+t')-z}{32(500+t+t')+z} \quad (222)$$

Si h et H_z sont les hauteurs lues sur le baromètre, on a, en désignant par m le coefficient moyen de dilatation du mercure dans le verre :

$$h' = \frac{h}{1+mt}, \quad \text{et} : \quad H'_z = \frac{H_z}{1+mt'};$$

et comme : $m = \frac{1}{5550}$, il vient :

$$H_z = h \frac{5550+t'}{5550+t} \times \frac{32(500+t+t')-z}{32(500+t+t')+z},$$

or, d'après la loi du §45

$$t' = t - \frac{273z}{50000+z}.$$

par suite :

$$H_z = h \frac{5550-t-\frac{273z}{50000+z}}{(5550+t)(50000+z)} \times \frac{32\left(500+t+t-\frac{273z}{50000+z}\right)-z}{32\left(500+t+t-\frac{273z}{50000+z}\right)+z},$$

ou encore :

$$H_z = h \frac{277500000+50000t+5550z+tz-273z}{(5550+t)(50000+z)} \times \frac{32(25000000+100000t+500z+2tz-273z)-z(50000+z)}{32(25000000+100000t+500z+2tz-273z)+z(50000+z)},$$

et :

$$H_z = h \frac{277500000+50000t+(5277+t)z}{(5550+t)(50000+z)} \times \frac{32[25000000+100000t+(227+2t)z]-(50000+z)z}{32[25000000+100000t+(227+2t)z]+(50000+z)z} \quad (223)$$

Dans le cas où :

$$h = H_0 = 0,760$$

et où la station inférieure est au niveau de la mer, on a :

$$H_z = 0,760 \frac{277500000+50000t+(5277+t)z}{(5550+t)(50000+z)} \times \frac{32[25000000+100000t+(227+2t)z]-(50000+z)z}{32[25000000+100000t+(227+2t)z]+(50000+z)z} \quad (224)$$

Cette formule ne tient pas compte de la latitude; mais a l'avantage de ne pas exiger l'emploi de logarithmes. Pour $\varphi = 45^\circ$, on a : $t = 12,5$, et il vient :

$$H_z = 0,760 \frac{278125000+5289,5z}{278125000+5562,5z} \times \frac{84000000+8064z-(50000+z)z}{84000000+8064z+(50000+z)z} \quad (225)$$

La formule de Babinet n'est applicable que pour de faibles altitudes. En effet, calculons la valeur de z pour laquelle H_z s'annule; c'est-à-dire cherchons la valeur de z qui annule :

Pour cela, résolvons l'équation :

$$z^2 + 41936z - 84000000 = 0,$$

nous trouvons pour z la valeur 14804, la valeur négative de z ne répondant pas à la question. En conséquence, la formule de Babinet ne s'applique déjà plus pour :

$$z = 15000^m.$$

Nous n'en ferons donc aucun usage.

§52 - Formule de Laplace — Si h_0 est la hauteur barométrique à la station inférieure pour laquelle la température est t , H_z la hauteur barométrique à la station supérieure pour laquelle la température est t' , H_z étant supposée réduite à la température t ; si de plus, φ est la latitude du lieu d'expérience et R le rayon de la Terre; dans sa Mécanique céleste, livre X, Laplace a établi la formule :

$$z = 18336 \left(1 + 0,002845 \cos 2\varphi\right) \left[\left(1 + \frac{z}{1000}\right) \log \frac{h_0}{H_z} + \frac{z}{R} \times 0,868589 \right]. \quad (226)$$

Or, on suppose :

$$R = 6366198^m,$$

par suite :

$$\frac{6366198}{18336} = 347,196662.$$

La formule (226) donne :

$$\log H_z = \log h_0 - \frac{z}{6366198+z} \left[\frac{347,196662}{(1+0,002845 \cos 2\varphi) \left(1 + \frac{t+t'}{500}\right)} - 0,868589 \right]. \quad (227)$$

Supposons qu'au niveau de la mer, on ait :

$$h_0 = 0,760,$$

$$\text{d'où} : \quad \log h_0 = 1,8808136.$$

De plus, nous savons (§45) que :

$$t' = t - \frac{273z}{50000+z} = \frac{50000t + (t-273)z}{50000+z},$$

donc:

$$t' = t - \frac{273z}{50\,000 + z} = \frac{50\,000t + (t - 273)z}{50\,000 + z},$$

et:

$$t + t' = \frac{100\,000t + (2t - 273)z}{50\,000 + z},$$

d'autre part:

$$1 + \frac{2(t+t')}{1\,000} = 1 + \frac{t+t'}{500} = 1 + \frac{1}{500} \cdot \frac{100\,000t + (2t - 273)z}{50\,000 + z} = \frac{50\,000 + 200t + (0,004t + 0,454)z}{50\,000 + z},$$

et la formule de Laplace ayant été établie pour: $\varphi = 50^\circ$, on peut prendre: $t = 10^\circ$, par suite:

$$1 + \frac{t+t'}{500} = \frac{50\,000 + 200 + (0,040 + 0,454)z}{50\,000 + z} = \frac{52\,000 + 0,494z}{50\,000 + z},$$

de sorte que la formule de Laplace prend dans ces nouvelles conditions la forme suivante:

$$\log H_z = 1,8808136 - \frac{z}{6\,366\,198 + z} \left\{ \frac{347,196\,662(50\,000 + z)}{(1 + 0,002\,845 \cos 2\varphi)(52\,000 + 0,494z)} - 0,868\,589 \right\}. \quad (228)$$

Cette formule a été quelque peu modifiée. Il résulte tout d'abord de certaines recherches entreprises par M. Peirce sur l'influence de l'attraction de la masse du continent sur l'oscillation du pendule que le facteur:

$$1 + 0,002\,845 \cos 2\varphi,$$

doit être remplacé par le facteur:

$$1 + 0,002\,630 \cos 2\varphi.$$

De plus, le coefficient 18 336 correspondait à la latitude: $\varphi = 50^\circ$. Calculons le coefficient A à substituer à 18 336, de façon que pour: $\varphi = 50^\circ$, on ait: $18\,336 = A(1 + 0,002\,630 \cos 2\varphi)_{\varphi=50^\circ}$.

On trouve:

$$A = \frac{18\,336}{1 + 0,002\,630 \cos 100^\circ} = \frac{18\,336}{1 - 0,002\,630 \times 0,173\,65} = 18\,344$$

de sorte que le facteur:

$$18\,336(1 + 0,002\,845 \cos 2\varphi),$$

de la formule de Laplace est remplacé par le facteur:

$$18\,344(1 + 0,002\,630 \cos 2\varphi).$$

Enfin, pour le rayon moyen de la Terre, nous prendrons:

$$R = 6\,371\,000^m.$$

de sorte que nous calculerons les valeurs de H_z par la nouvelle formule:

$$\log H_z = 1,8808136 - \frac{z}{6\,371\,000 + z} \left\{ \frac{347,307\,020(50\,000 + z)}{(1 + 0,002\,630 \cos 2\varphi)(50\,000 + 200t + (0,004t + 0,454)z)} - 0,868\,589 \right\}. \quad (229)$$

C'est à l'aide de cette formule que nous avons calculé les valeurs de H_z de $z = 0^m$ à $z = 50\,000^m$ de 1000 mètres en 1000 mètres aux différentes latitudes φ : $0^\circ, 45^\circ, 49^\circ, 53^\circ$ et 90° , la zone comprise entre 45° et 53° étant celle du théâtre de la dernière guerre franco-allemande.

§ 53. Comparaison des valeurs fournies pour H_z par les formules de Ramond, de Hailey et de Laplace. Pour faire cette comparaison, supposons:

$$\varphi = 45^\circ,$$

et par suite:

$$t = 12,5$$

z variant de 0^m à $50\,000^m$ et l'argument étant 5000 mètres.

z	Formules de:			z	Formules de:		
	Ramond	Hailey	Laplace		Ramond	Hailey	Laplace
0^m	$0^m,760$	$0^m,760$	$0^m,760$	$30\,000^m$	$0^m,009$	$0^m,017$	$0^m,009$
5 000	0,419	0,405	0,405	35 000	0,004	0,009	0,004
10 000	0,206	0,216	0,204	40 000	0,002	0,005	0,001
15 000	0,100	0,115	0,098	45 000	0,001	0,003	0,001
20 000	0,046	0,062	0,045	50 000	0,000	0,001	0,000
25 000	0,021	0,033	0,020				

Pour $\varphi = 45^\circ$, la formule de Ramond donne des résultats analogues à ceux fournis par la formule de Laplace.

554 — Table des valeurs de H , calculées par la formule de Laplace

z	$\varphi = 0^\circ$ $t = 35^\circ$	$\varphi = 45^\circ$ $t = 12^\circ,5$	$\varphi = 49^\circ$ $t = 10^\circ,5$	$\varphi = 53^\circ$ $t = 8^\circ,5$	$\varphi = 90^\circ$ $t = -10^\circ$	z	$\varphi = 0^\circ$ $t = 35^\circ$	$\varphi = 45^\circ$ $t = 12^\circ,5$	$\varphi = 49^\circ$ $t = 10^\circ,5$	$\varphi = 53^\circ$ $t = 8^\circ,5$	$\varphi = 90^\circ$ $t = -10^\circ$
000 ^m	0 ^m ,760	0 ^m ,760	0 ^m ,760	0 ^m ,760	0 ^m ,760	26 000 ^m	0 ^m ,024	0 ^m ,017	0 ^m ,016	0 ^m ,016	0 ^m ,011
1 000	0,680	0,673	0,673	0,672	0,665	27 000	0,021	0,014	0,014	0,013	0,009
2 000	0,607	0,595	0,594	0,593	0,581	28 000	0,018	0,012	0,012	0,011	0,007
3 000	0,541	0,525	0,523	0,521	0,506	29 000	0,016	0,010	0,010	0,009	0,006
4 000	0,481	0,461	0,459	0,457	0,439	30 000	0,013	0,009	0,008	0,008	0,005
5 000	0,427	0,405	0,403	0,400	0,380	31 000	0,011	0,007	0,007	0,007	0,004
6 000	0,378	0,354	0,352	0,350	0,328	32 000	0,010	0,006	0,006	0,006	0,003
7 000	0,334	0,310	0,308	0,305	0,282	33 000	0,008	0,005	0,005	0,005	0,003
8 000	0,295	0,270	0,268	0,265	0,242	34 000	0,007	0,004	0,004	0,004	0,002
9 000	0,260	0,235	0,232	0,230	0,208	35 000	0,006	0,004	0,003	0,003	0,002
10 000	0,229	0,204	0,202	0,199	0,177	36 000	0,005	0,003	0,003	0,003	0,001
11 000	0,201	0,177	0,175	0,172	0,151	37 000	0,004	0,002	0,002	0,002	0,001
12 000	0,176	0,153	0,151	0,149	0,129	38 000	0,004	0,002	0,002	0,002	0,001
13 000	0,155	0,132	0,130	0,128	0,110	39 000	0,003	0,002	0,002	0,002	0,001
14 000	0,136	0,114	0,112	0,110	0,093	40 000	0,003	0,001	0,001	0,001	0,001
15 000	0,119	0,098	0,096	0,094	0,078	41 000	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001
16 000	0,104	0,084	0,083	0,081	0,066	42 000	0,002	0,001	0,001	0,001	0,000
17 000	0,090	0,072	0,071	0,069	0,056	43 000	0,002	0,001	0,001	0,001	0,000
18 000	0,078	0,062	0,061	0,059	0,047	44 000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000
19 000	0,068	0,053	0,052	0,050	0,039	45 000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000
20 000	0,059	0,045	0,044	0,043	0,033	46 000	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
21 000	0,051	0,038	0,037	0,036	0,027	47 000	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
22 000	0,044	0,033	0,032	0,031	0,023	48 000	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
23 000	0,038	0,028	0,027	0,026	0,019	49 000	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
24 000	0,033	0,024	0,023	0,022	0,016	50 000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
25 000	0,028	0,020	0,019	0,019	0,013						

Nous donnons ci-après la Table complémentaire pour laquelle l'argument n'est que de 100^m

z	$\varphi = 45^\circ$ $t = 12^\circ,5$	$\varphi = 46^\circ$ $t = 12^\circ$	$\varphi = 47^\circ$ $t = 11^\circ,5$	$\varphi = 48^\circ$ $t = 11^\circ$	$\varphi = 49^\circ$ $t = 10^\circ,5$	$\varphi = 50^\circ$ $t = 10^\circ$	$\varphi = 51^\circ$ $t = 9^\circ,5$	$\varphi = 52^\circ$ $t = 9^\circ$	$\varphi = 53^\circ$ $t = 8^\circ,5$
100 ^m	0 ^m ,751	0 ^m ,751	0 ^m ,751	0 ^m ,751	0 ^m ,751	0 ^m ,751	0 ^m ,751	0 ^m ,751	0 ^m ,751
200	0,742	0,742	0,742	0,742	0,742	0,742	0,742	0,742	0,742
300	0,733	0,733	0,733	0,733	0,733	0,733	0,733	0,733	0,733
400	0,724	0,724	0,724	0,724	0,724	0,724	0,724	0,724	0,723
500	0,715	0,715	0,715	0,715	0,715	0,715	0,715	0,715	0,714
600	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	0,706	0,706	0,706
700	0,699	0,699	0,699	0,699	0,699	0,698	0,698	0,698	0,698
800	0,690	0,690	0,690	0,690	0,690	0,689	0,689	0,689	0,689
900	0,682	0,682	0,682	0,682	0,682	0,681	0,681	0,681	0,681

Chapitre III.

Étude de la fonction Ξ .

§ 55. Influence de la situation géographique sur la portée d'un canon.

Dans mon Traité de Balistique graphique j'ai montré par des exemples l'influence de la situation géographique du lieu d'expérience sur la portée et par suite sur tous les éléments du tir d'un canon.

Je ne rappellerai ici que le suivant : Supposons qu'un canon de 0^m,320 lance un projectile de 500^{kg} à la vitesse initiale de 1000^m, sous un angle de projection de 20° seulement. Voyons dans ces conditions quelles seront les portées de ce canon à Quito d'une part et à Christiania d'autre part.

Les caractéristiques de Quito sont : $z = 2913^m$, $\varphi = 0^\circ 14' 00'' S$,
et celles de Christiania sont : $z = 0^m$, $\varphi = 59^\circ 54' 44'' N$.

Le calcul montre qu'à Quito, pour : $\alpha = 20^\circ$, on a : $X = 23\,700^m$,
tandis qu'à Christiania pour le même angle : $\alpha = 20^\circ$ " $X = 19\,965^m$,
soit une différence de portée de 3735^m, environ $\frac{1}{6}$ de cette portée.

Si pour un angle de projection de 20° seulement, on trouve déjà une telle différence de portée, il faut de toute nécessité trouver le moyen de tenir compte des données géographiques du lieu d'expérience surtout quand il s'agit de canons de gros calibre à très longues portées et qu'on veut établir une table de tir.

C'est ce que nous nous proposons d'étudier dans le présent chapitre.

§ 56. Poids du mètre cube d'air atmosphérique. — D'après les recherches les plus récentes, le poids de l'air atmosphérique sec à Paris à la température de la glace fondante et sous la pression de 0^m,760 de mercure est à volume égal $\frac{1}{773,28}$ de celui de l'eau distillée. A Paris, à l'altitude de 60 mètres, à la température de 0° et sous la pression de 0^m,760 de mercure, Regnault a trouvé que le mètre cube d'air sec pèse 1^{kg},292 2743. On en déduit : 1^{kg},292 2743 pour le poids du mètre cube d'air sec sous le parallèle de 45° et au niveau de la mer, c'est-à-dire pour : $\varphi = 45^\circ$, et $z = 0^m$.

Or le poids du mètre cube d'air supposé sec à la température de t° centigrades, sous la pression H_z à la latitude φ et à l'altitude z est donné par la formule :

$$\Delta_t = 1,292\,2743 \times \frac{H_z}{0,760} \times \frac{1}{1 + 0,003\,665\,t}. \quad (230)$$

Si l'on veut tenir compte de l'humidité de l'air, en désignant par f_t la force élastique de la vapeur d'eau à t° exprimée en mètre, le poids du mètre cube d'air sec est alors donné par la formule :

$$\Delta_t = 1,292\,2743 \times \frac{H_z - f_t}{0,760} \times \frac{1}{1 + 0,003\,665\,t}, \quad (231)$$

et le poids de la vapeur d'eau contenue dans ce mètre cube d'air atmosphérique, dans les mêmes conditions est :

$$S_t = 1,292\,2743 \times 0,623\,5 \times \frac{f_t}{0,760} \times \frac{1}{1 - 0,003\,665\,t}, \quad (232)$$

de sorte que le poids d'air atmosphérique humide est :

$$\Delta'_t = \Delta_t + S_t = 1,292\,2743 \times \frac{H_z - f_t}{0,760} \times \frac{1}{1 + 0,003\,665\,t} + 1,292\,2743 \times 0,623\,5 \times \frac{f_t}{0,760} \times \frac{1}{1 + 0,003\,665\,t},$$

ce qu'on peut écrire successivement :

$$\Delta'_t = 1,292\,2743 \times \frac{1}{0,760(1 + 0,003\,665\,t)} \times (H_z + 0,6235f_t - f_t) = \frac{1,292\,2743}{0,760(1 + 0,003\,665\,t)} \times (H_z - 0,3765f_t). \quad (233)$$

Si t est la température au niveau du sol, on sait qu'à l'altitude z , elle est :

$$t' = t - \frac{273z}{50\,000 + z},$$

par suite, le poids Δ'_t du mètre cube d'air atmosphérique à cette altitude z est :

$$\Delta'_t = \frac{1,292\,274\,3(50\,000+z)}{0,760\{50\,000+z+0,003\,665[(50\,000+z)t-273\,z]\}} (H_z - 0,376\,5f_t) = \frac{1,292\,274\,3(50\,000-z)}{0,760(50\,000+183,25t+0,003\,665\,tz)} (H_z - 0,376\,5f_t) \quad (234)$$

Dans cette formule, il est tenu compte de la latitude du lieu, attendu que H_z est supposé calculé par la formule de Laplace (229). Les formules, que nous établirons plus loin seront calculées en supposant:

$$f_t = 0,5 F_t \quad (235)$$

F_t étant la tension maximum de la vapeur d'eau à la température de t° centigrades, de sorte que finalement, en désignant par Δ le poids du mètre cube de cet air atmosphérique, on a:

$$\Delta = 1,292\,274\,3 \frac{50\,000+z}{0,760(50\,000+183,25t+0,003\,665\,tz)} (H_z - 0,188\,25 F_t) \quad (236)$$

§ 57. Table des tensions maxima de la vapeur d'eau d'après Regnault.

t	F_t	t	F_t	t	F_t	t	F_t
-30°	0 ^m ,000 386	0°	0 ^m ,004 600	14°	0 ^m ,011 908	28°	0 ^m ,028 101
-25	0,000 605	1	0,004 940	15	0,012 699	29	0,029 782
-20	0,000 927	2	0,005 302	16	0,013 536	30	0,031 548
-15	0,001 400	3	0,005 687	17	0,014 421	31	0,033 406
-10	0,002 093	4	0,006 097	18	0,015 357	32	0,035 359
-9	0,002 267	5	0,006 534	19	0,016 346	33	0,037 411
-8	0,002 455	6	0,006 998	20	0,017 391	34	0,039 565
-7	0,002 658	7	0,007 492	21	0,018 495	35	0,041 827
-6	0,002 876	8	0,008 017	22	0,019 659	36	0,044 268
-5	0,003 113	9	0,008 574	23	0,020 888	37	0,046 758
-4	0,003 368	10	0,009 165	24	0,022 184	38	0,049 368
-3	0,003 641	11	0,009 792	25	0,023 550	39	0,052 103
-2	0,003 941	12	0,010 457	26	0,024 988	40	0,054 969
-1	0,004 263	13	0,011 162	27	0,026 505		

§ 58. Fonction Ξ — Reprenons la formule:

$$\Delta = 1,292\,274\,3 \frac{50\,000+z}{0,760(50\,000+183,25t+0,003\,665\,tz)} (H_z - 0,188\,25 F_t),$$

et posons:

$$\Xi = \frac{50\,000+z}{0,760(50\,000+183,25t+0,003\,665\,tz)} (H_z - 0,188\,25 F_t), \quad (237)$$

nous pouvons écrire:

$$\Delta = 1,292\,274\,3 \Xi \quad (238)$$

La Table ci-après donne les valeurs de cette fonction Ξ et du poids du mètre cube d'air atmosphérique Δ correspondant pour les latitudes:

$\varphi = 0^\circ, \quad \varphi = 45^\circ, \quad \varphi = 49^\circ, \quad \varphi = 53^\circ, \quad \varphi = 90^\circ,$
 et aux altitudes variant de 0^m à 60 000^m, l'argument étant 1 000^m, en attribuant à t les valeurs données par la formule:

	$t' = t - \frac{273z}{50\,000+z},$	t étant la température au niveau de la mer.	
Pour:	$\varphi = 0^\circ,$	$t = 35^\circ,$	et $F_t = 0m,041 8$
"	$\varphi = 45^\circ,$	$t = 12^\circ,5$	" $F_t = 0m,010 8$
"	$\varphi = 49^\circ,$	$t = 10^\circ,5$	" $F_t = 0m,009 5$
"	$\varphi = 53^\circ,$	$t = 8^\circ,5$	" $F_t = 0m,008 3$
"	$\varphi = 90^\circ,$	$t = -10^\circ$	" $F_t = 0m,002 1$

§ 59. Table des valeurs de Ξ et Δ .

z	$\varphi = 0^\circ$		$\varphi = 45^\circ$		$\varphi = 49^\circ$		$\varphi = 53^\circ$		$\varphi = 90^\circ$	
	Ξ	Δ	Ξ	Δ	Ξ	Δ	Ξ	Δ	Ξ	Δ
0 ^m	0,877	^{kg} 1,134	0,955	^{kg} 1,235	0,960	^{kg} 1,241	0,968	^{kg} 1,252	1,038	^{kg} 1,342
1 000	0,798	1,032	0,861	1,115	0,868	1,122	0,872	1,128	0,927	1,198
2 000	0,728	0,941	0,776	1,003	0,780	1,008	0,785	1,015	0,827	1,069
3 000	0,661	0,855	0,697	0,901	0,700	0,905	0,702	0,907	0,734	0,949
4 000	0,598	0,773	0,624	0,807	0,626	0,809	0,628	0,812	0,649	0,839
5 000	0,539	0,697	0,557	0,720	0,559	0,723	0,560	0,724	0,573	0,741
6 000	0,486	0,628	0,496	0,642	0,498	0,644	0,499	0,645	0,504	0,652
7 000	0,436	0,564	0,441	0,570	0,442	0,571	0,442	0,571	0,441	0,570
8 000	0,390	0,504	0,391	0,505	0,392	0,506	0,391	0,505	0,386	0,498
9 000	0,349	0,451	0,346	0,447	0,346	0,447	0,345	0,446	0,338	0,436
10 000	0,313	0,405	0,305	0,394	0,305	0,394	0,304	0,393	0,295	0,381
11 000	0,279	0,362	0,268	0,346	0,268	0,346	0,266	0,344	0,256	0,331
12 000	0,249	0,322	0,235	0,304	0,235	0,304	0,233	0,302	0,221	0,286
13 000	0,221	0,286	0,206	0,267	0,206	0,267	0,204	0,265	0,191	0,247
14 000	0,197	0,255	0,180	0,233	0,180	0,233	0,178	0,231	0,164	0,212
15 000	0,175	0,226	0,158	0,204	0,157	0,203	0,155	0,201	0,140	0,181
16 000	0,154	0,199	0,138	0,178	0,137	0,177	0,135	0,175	0,120	0,155
17 000	0,135	0,175	0,120	0,155	0,119	0,154	0,117	0,152	0,113	0,133
18 000	0,119	0,154	0,105	0,135	0,104	0,134	0,102	0,132	0,088	0,114
19 000	0,105	0,136	0,091	0,117	0,090	0,116	0,088	0,114	0,075	0,097
20 000	0,092	0,119	0,079	0,102	0,078	0,100	0,076	0,098	0,063	0,082
21 000	0,081	0,104	0,068	0,088	0,067	0,086	0,066	0,085	0,053	0,069
22 000	0,070	0,090	0,059	0,076	0,057	0,074	0,056	0,073	0,045	0,058
23 000	0,061	0,078	0,051	0,066	0,049	0,063	0,048	0,062	0,039	0,050
24 000	0,053	0,068	0,043	0,056	0,042	0,054	0,041	0,053	0,033	0,042
25 000	0,046	0,059	0,037	0,048	0,036	0,046	0,035	0,045	0,027	0,035
26 000	0,040	0,052	0,032	0,041	0,031	0,040	0,030	0,039	0,023	0,029
27 000	0,035	0,045	0,027	0,035	0,026	0,034	0,025	0,033	0,019	0,024
28 000	0,031	0,039	0,023	0,030	0,022	0,029	0,022	0,029	0,016	0,020
29 000	0,027	0,034	0,019	0,025	0,019	0,025	0,019	0,025	0,014	0,017
30 000	0,023	0,030	0,016	0,021	0,016	0,021	0,016	0,021	0,011	0,014
31 000	0,019	0,025	0,014	0,018	0,014	0,018	0,014	0,018	0,009	0,012
32 000	0,016	0,021	0,012	0,016	0,012	0,016	0,012	0,016	0,007	0,010
33 000	0,014	0,018	0,010	0,014	0,010	0,014	0,010	0,014	0,006	0,008
34 000	0,012	0,016	0,009	0,012	0,009	0,012	0,009	0,012	0,005	0,006
35 000	0,011	0,014	0,008	0,010	0,008	0,010	0,008	0,010	0,004	0,005
36 000	0,010	0,013	0,006	0,008	0,006	0,008	0,006	0,008	0,003	0,004
37 000	0,009	0,012	0,005	0,006	0,005	0,006	0,005	0,006	0,002	0,003
38 000	0,008	0,010	0,004	0,005	0,004	0,005	0,004	0,005	0,002	0,002

z	$\varphi = 0^\circ$		$\varphi = 45^\circ$		$\varphi = 49^\circ$		$\varphi = 53^\circ$		$\varphi = 90^\circ$	
	Ξ	Δ	Ξ	Δ	Ξ	Δ	Ξ	Δ	Ξ	Δ
39 000 ^m	0,007	0 ^{kg} ,009	0,003	0 ^{kg} ,004	0,003	0 ^{kg} ,004	0,003	0 ^{kg} ,004	0,001	0 ^{kg} ,002
40 000	0,006	0,008	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,001	0,001
41 000	0,005	0,006	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001
42 000	0,004	0,005	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001
43 000	0,004	0,004	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,000	0,000
44 000	0,003	0,004	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	"	"
45 000	0,003	0,003	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	"	"
46 000	0,002	0,003	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	"	"
47 000	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	"	"
48 000	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	"	"
49 000	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	"	"
50 000	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	"	"	"	"
51 000	0,001	0,001	"	"	"	"	"	"	"	"
52 000	0,001	0,001	"	"	"	"	"	"	"	"
53 000	0,001	0,001	"	"	"	"	"	"	"	"
54 000	0,001	0,001	"	"	"	"	"	"	"	"
55 000	0,001	0,001	"	"	"	"	"	"	"	"
56 000	0,001	0,001	"	"	"	"	"	"	"	"
57 000	0,000	0,000	"	"	"	"	"	"	"	"
58 000	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
59 000	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
60 000	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"

Dans la table complémentaire ci-après nous donnons les valeurs de Ξ et de Δ pour les altitudes de 0^m à 1000^m, l'argument étant 100^m et pour les latitudes :

$\varphi = 45^\circ$, $\varphi = 46^\circ$, $\varphi = 47^\circ$, $\varphi = 48^\circ$, $\varphi = 49^\circ$, $\varphi = 50^\circ$, $\varphi = 51^\circ$, $\varphi = 52^\circ$, $\varphi = 53^\circ$.

z	$\varphi = 45^\circ$		$\varphi = 46^\circ$		$\varphi = 47^\circ$		$\varphi = 48^\circ$		$\varphi = 49^\circ$	
	Ξ	Δ	Ξ	Δ	Ξ	Δ	Ξ	Δ	Ξ	Δ
0 ^m	0,955	1 ^{kg} ,235	0,956	1 ^{kg} ,236	0,957	1 ^{kg} ,237	0,959	1 ^{kg} ,239	0,960	1 ^{kg} ,241
100	0,945	1,222	0,946	1,223	0,947	1,224	0,949	1,226	0,950	1,228
200	0,935	1,209	0,936	1,210	0,938	1,212	0,940	1,214	0,941	1,216
300	0,925	1,196	0,927	1,198	0,928	1,200	0,930	1,202	0,931	1,204
400	0,915	1,184	0,917	1,185	0,918	1,188	0,920	1,190	0,922	1,192
500	0,906	1,172	0,907	1,173	0,909	1,176	0,911	1,178	0,912	1,180
600	0,897	1,160	0,898	1,161	0,900	1,164	0,902	1,166	0,903	1,168
700	0,888	1,148	0,889	1,149	0,891	1,152	0,893	1,154	0,894	1,156
800	0,879	1,136	0,880	1,138	0,882	1,140	0,884	1,143	0,885	1,144
900	0,870	1,125	0,871	1,126	0,873	1,128	0,875	1,131	0,876	1,132
1000	0,861	1,113	0,862	1,114	0,863	1,116	0,865	1,120	0,868	1,122

z	$\varphi = 50^\circ$		$\varphi = 51^\circ$		$\varphi = 52^\circ$		$\varphi = 53^\circ$	
	Ξ	Δ	Ξ	Δ	Ξ	Δ	Ξ	Δ
0 ^m	0,962	1 ^{kg} ,244	0,964	1 ^{kg} ,246	0,966	1 ^{kg} ,249	0,968	1 ^{kg} ,252
100	0,952	1,231	0,954	1,233	0,956	1,236	0,958	1,238
200	0,943	1,219	0,945	1,221	0,946	1,223	0,947	1,225
300	0,933	1,206	0,935	1,208	0,936	1,210	0,937	1,212
400	0,924	1,194	0,925	1,196	0,926	1,197	0,927	1,199
500	0,914	1,182	0,915	1,184	0,917	1,185	0,918	1,186
600	0,905	1,170	0,906	1,172	0,907	1,173	0,908	1,174
700	0,895	1,157	0,897	1,159	0,898	1,161	0,899	1,162
800	0,886	1,145	0,888	1,147	0,889	1,149	0,890	1,151
900	0,877	1,133	0,879	1,135	0,880	1,137	0,881	1,139
1000	0,868	1,122	0,869	1,124	0,870	1,125	0,872	1,128

§ 60. Altitudes pour lesquelles la fonction Ξ a des valeurs déterminées à la latitude de: $\varphi = 49^\circ$ — La Table suivante donne les altitudes pour lesquelles la fonction Ξ a des valeurs déterminées entre 0,950 et zéro, sous la latitude moyenne de $\varphi = 49^\circ$ qui vient d'être celle du théâtre de la dernière guerre franco-allemande et pour laquelle nous établirons ultérieurement nos Tables de tir.

Ξ	Δ	Diff.	z	Différences	Moyennes de Ξ	Diff.	Moyennes de Δ	Diff.
0,950	1 ^{kg} ,228		100 ^m					
0,900	1,164	64	630	530	0,925	50	1,196	65
0,850	1,099	65	1 180	550	0,875	50	1,131	64
0,800	1,034	65	1 760	580	0,825	50	1,067	65
0,750	0,970	64	2 370	610	0,775	50	1,002	65
0,700	0,905	65	3 000	630	0,725	50	0,937	64
0,650	0,840	65	3 660	660	0,675	50	0,873	65
0,600	0,776	64	4 370	710	0,625	50	0,808	65
0,550	0,711	65	5 130	760	0,575	50	0,743	64
0,500	0,646	65	5 960	830	0,525	50	0,679	65
0,450	0,582	64	6 860	900	0,475	50	0,614	65
0,400	0,517	65	7 840	980	0,425	50	0,549	64
0,350	0,452	65	8 920	1 080	0,375	50	0,485	65
0,300	0,388	64	10 150	1 230	0,325	50	0,420	65
0,250	0,323	65	11 570	1 420	0,275	50	0,355	64
0,200	0,259	64	13 250	1 680	0,225	50	0,291	65
0,150	0,194	65	15 340	2 090	0,175	50	0,226	64
0,100	0,129	65	18 300	2 960	0,125	50	0,162	65
0,050	0,065	64	22 880	4 580	0,075	375	0,097	49
0,025	0,032	33	27 300	4 420	0,0375	25	0,048	32
0,000	0,000	32	49 000	21 700	0,0125		0,016	

561 - Valeurs de la fonction Ξ et du poids moyen Δ du mètre cube d'air atmosphérique pour quelques villes dans le voisinage du théâtre de la dernière guerre ~

Villes	Latitudes N	Altitudes du sol	Ξ	Δ	Villes	Latitudes N	Altitudes du sol	Ξ	Δ
Abbeville	50° 7' 5"	8 ^m	0,962	1,244	Mirecourt	48° 18' 7"	289 ^m	0,931	1,204
Amiens	49 53 43	33	0,959	1,240	Montbéliard	47 30 36	318	0,927	1,198
Anvers	51 12 28	6	0,964	1,246	Montdidier	49 39 0	97	0,951	1,229
Arcis-sur-Aube	48 32 14	95	0,949	1,226	Montmédy	49 31 6	198	0,942	1,217
Arras	50 17 31	72	0,955	1,235	Montreuil	50 27 54	48	0,958	1,239
Avesnes	50 7 22	152	0,947	1,225	Mulhouse	47 44 31	287	0,930	1,202
Bar-le-Duc	48 46 8	209	0,941	1,216	Nancy	48 41 31	212	0,940	1,214
Bar-sur-Aube	48 14 2	166	0,943	1,219	Neufchâteau	48 21 18	306	0,930	1,202
Bar-sur-Seine	48 6 50	159	0,944	1,221	Nieuport	51 7 53	5	0,964	1,246
Besuvais	49 26 0	67	0,953	1,232	Nogent-sur-Seine	48 29 35	72	0,952	1,231
Besançon	47 14 59	312	0,927	1,198	Paris	48 50 46	33	0,957	1,237
Belfort	47 38 13	358	0,924	1,195	Peronne	49 55 47	54	0,957	1,237
Béthune	50 31 58	25	0,960	1,241	Pontarlier	46 54 9	838	0,878	1,135
Boulogne-sur-mer	50 43 33	6	0,963	1,245	Provins	48 33 41	91	0,949	1,226
Briey	49 14 59	204	0,941	1,216	Reims	49 15 15	83	0,952	1,231
Bruxelles	50 51 11	137	0,951	1,229	Remiremont	48 0 38	399	0,920	1,190
Cambrai	50 10 39	75	0,956	1,236	Rethel	49 30 44	74	0,954	1,234
Châlons-sur-Marne	48 57 22	83	0,952	1,231	Rocroi	49 55 32	377	0,927	1,199
Château-Thierry	49 2 46	63	0,954	1,234	Saint-Denis	48 56 11	33	0,957	1,237
Colmar	48 4 41	195	0,940	1,214	Saint-Dié	48 17 4	343	0,926	1,197
Cologne	50 56 33	55	0,949	1,226	Saint-Omer	50 44 53	21	0,961	1,242
Commercy	48 45 54	232	0,938	1,212	Sainte-Menehould	49 5 27	139	0,946	1,223
Compiègne	49 25 3	41	0,957	1,237	Saint-Pol	50 22 55	87	0,954	1,234
Coulommiers	48 48 32	72	0,953	1,232	Saint-Quentin	49 50 55	74	0,955	1,235
Douai	50 22 15	24	0,960	1,241	Sarreguemines	49 6 42	203	0,941	1,216
Doullens	50 9 17	64	0,956	1,236	Sceaux	48 46 39	98	0,950	1,228
Dunkerque	51 2 8	4	0,964	1,246	Sedan	49 42 6	157	0,946	1,223
Epernay	49 2 52	72	0,953	1,232	Senlis	49 12 27	76	0,953	1,232
Epinal	48 18 24	340	0,926	1,197	Soissons	49 22 53	55	0,955	1,235
Evreux	49 1 30	67	0,953	1,232	Strasbourg	48 34 57	144	0,945	1,222
Fontainebleau	48 24 23	79	0,951	1,229	Toul	48 40 32	209	0,940	1,214
Hazebrouck	50 43 12	26	0,961	1,242	Troyes	48 18 3	113	0,948	1,225
Laon	49 33 48	83	0,953	1,232	Valenciennes	50 21 29	22	0,960	1,241
Lille	50 38 44	21	0,961	1,242	Verdun	49 9 47	199	0,941	1,216
Lunéville	48 35 35	230	0,938	1,212	Versailles	48 47 56	123	0,947	1,225
Meaux	48 57 40	52	0,955	1,235	Vervins	49 50 8	147	0,948	1,225
Melun	48 32 32	54	0,955	1,235	Vesoul	47 37 26	220	0,937	1,211
Metz	49 7 14	177	0,943	1,219	Vitry-le-François	48 43 34	105	0,950	1,228
Mézières	49 45 43	148	0,946	1,223	Youziers	49 23 53	96	0,950	1,226

Chapitre XIII ~

Étude de la fonction perturbatrice Ψ .

§ 62. Fonction Ψ quand l'angle de projection ne dépasse pas 35° — La for-

mule

$$\Delta = 1^{\text{kg}} 292\ 274\ 3\ \Xi,$$

donne le poids moyen du mètre cube d'air atmosphérique en un lieu déterminé par les quantités : z , φ et t ; mais ce n'est pas encore cette quantité Δ qu'il faut introduire dans la formule qui détermine $10^{10}R$. En effet, quand un projectile décrit sa trajectoire dans l'atmosphère, il rencontre successivement des couches d'air dont le poids spécifique varie constamment. Il faut donc prendre pour poids moyen Δ_m du mètre cube d'air atmosphérique une quantité définie par la relation :

$$\Delta_m = \Delta \Psi, \quad (239)$$

ou encore :

$$\Delta_m = 1^{\text{kg}} 292\ 274\ 3\ \Xi \cdot \Psi, \quad (240)$$

Ψ étant une certaine fonction de l'angle de projection α , du poids du projectile, de la vitesse initiale V , de l'altitude z et de la latitude φ du lieu d'expérience.

Dans mon Traité de Balistique graphique, j'ai indiqué pour les angles de projection α ne dépassant pas 35° : $\alpha \leq 35^\circ$, la formule suivante :

$$\Psi = (\cos \alpha) \left[0,000\ 01 (2p^{\frac{1}{2}} V^3)^{\chi(\alpha)} \right]^{1+0,001 p(\alpha) z^{\tau(\alpha)}} \left(1,15 - \frac{\varphi}{300} \right) \quad (241)$$

comme paraissant être la plus conforme avec l'expérience. Cette formule peut subir certaines modifications.

Ainsi, quand le tir est effectué en un lieu dont la latitude est voisine de 45° , on peut adopter la formule :

$$\Psi = (\cos \alpha) \left[0,000\ 01 (2p^{\frac{1}{2}} V^3)^{\chi(\alpha)} \right]^{1+0,001 p(\alpha) z^{\tau(\alpha)}} \quad (242)$$

Si le tir a lieu au bord de la mer : $z = 0$, et on peut alors se servir de la formule :

$$\Psi = (\cos \alpha) \left[0,000\ 01 (2p^{\frac{1}{2}} V^3)^{\chi(\alpha)} \right]^{(1,15 - \frac{\varphi}{300})} \quad (243)$$

Si l'on a en même temps : $\varphi = 45^\circ$ et $z = 0$, la formule est encore plus simple :

$$\Psi = (\cos \alpha) \left[0,000\ 01 (2p^{\frac{1}{2}} V^3)^{\chi(\alpha)} \right] \quad (244)$$

Enfin, dans le cas du tir de plein fouet, pour lequel $\alpha \leq 15^\circ$, il suffit de prendre la formule :

$$\Psi = (\cos \alpha) \left[0,000\ 01 (2p^{\frac{1}{2}} V^3)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot (0,000\ 014 p^{\frac{1}{2}} V^{\frac{3}{2}}) = (\cos \alpha) \quad (245)$$

$\chi(\alpha)$, $p(\alpha)$ et $\tau(\alpha)$ sont des fonctions de l'angle de projection α que j'ai calculées au Creusot et dont les valeurs sont consignées dans le Tableau ci-dessous :

α	$\chi(\alpha)$	$p(\alpha)$	$\tau(\alpha)$	α	$\chi(\alpha)$	$p(\alpha)$	$\tau(\alpha)$	α	$\chi(\alpha)$	$p(\alpha)$	$\tau(\alpha)$	α	$\chi(\alpha)$	$p(\alpha)$	$\tau(\alpha)$
0°	0,500	1,202	0,000	9°	0,467	0,987	0,004	18°	0,448	0,802	0,074	27°	0,436	0,654	0,399
1	0,495	1,175	0,000	10	0,464	0,965	0,007	19	0,447	0,784	0,092	28	0,434	0,640	0,484
2	0,490	1,149	0,000	11	0,462	0,943	0,011	20	0,445	0,766	0,113	29	0,433	0,626	0,593
3	0,486	1,124	0,000	12	0,460	0,922	0,016	21	0,444	0,749	0,137	30	0,432	0,613	0,734
4	0,482	1,100	0,000	13	0,458	0,901	0,022	22	0,442	0,732	0,165	31	0,431	0,601	0,916
5	0,478	1,077	0,001	14	0,456	0,880	0,029	23	0,441	0,716	0,197	32	0,430	0,591	1,148
6	0,475	1,054	0,001	15	0,454	0,860	0,037	24	0,440	0,700	0,234	33	0,429	0,582	1,438
7	0,472	1,032	0,001	16	0,452	0,840	0,047	25	0,438	0,684	0,278	34	0,428	0,575	1,794
8	0,469	1,009	0,002	17	0,450	0,821	0,059	26	0,437	0,669	0,332	35	0,427	0,569	2,223

§ 63. Fonction: $\frac{f(w)}{\sin \gamma}$. — Reprenons la formule (50)

$$R = \frac{p}{g} c F(w) \quad (246)$$

du § 18. On compare souvent la résistance de l'air R au carré de la vitesse w^2 . En d'autres termes, on prend la valeur du rapport $\frac{R}{w^2}$ et on est conduit à poser:

$$F(w) = f(w) w^2 \quad (247)$$

ce qui donne:

$$R = \frac{p}{g} c f(w) \cdot w^2 \quad (248)$$

Il résulte des nombreuses expériences qui ont été faites pour déterminer la fonction $f(w)$, que si γ est le demi angle ogival du projectile, on peut écrire:

$$\frac{f(w)}{\sin \gamma} = 0,366 - \frac{0,244}{10 \cdot 0,000\,023 \left(\frac{w}{100}\right)^{10}} \quad (249)$$

Cette fonction présente un point d'inflexion pour: $w = 333,5^m$ qui est sensiblement la vitesse de propagation du son dans l'air. De cette formule, on déduit la Table ci-dessous:

w	$\frac{f(w)}{\sin \gamma}$	Diff.	w	$\frac{f(w)}{\sin \gamma}$	Diff.	w	$\frac{f(w)}{\sin \gamma}$	Diff.	w	$\frac{f(w)}{\sin \gamma}$	Diff.
100 ^m	0,1220		255 ^m	0,1366	0,0026	310 ^m	0,2079	0,0106	365 ^m	0,3396	0,0088
200	0,1233	0,0013	260	0,1396	0,0030	315	0,2194	0,0115	370	0,3469	0,0073
210	0,1242	0,0009	265	0,1431	0,0035	320	0,2316	0,0122	375	0,3528	0,0059
215	0,1247	0,0005	270	0,1472	0,0041	325	0,2444	0,0128	380	0,3572	0,0044
220	0,1254	0,0007	275	0,1520	0,0048	330	0,2576	0,0132	385	0,3605	0,0033
225	0,1263	0,0009	280	0,1574	0,0054	335	0,2710	0,0134	390	0,3628	0,0023
230	0,1274	0,0011	285	0,1637	0,0063	340	0,2842	0,0132	395	0,3643	0,0015
235	0,1287	0,0013	290	0,1707	0,0070	345	0,2971	0,0129	400	0,3651	0,0008
240	0,1302	0,0015	295	0,1786	0,0079	350	0,3094	0,0123	et		
245	0,1319	0,0017	300	0,1875	0,0089	355	0,3207	0,0113	400 ^m	0,3660	
250	0,1340	0,0021	305	0,1973	0,0098	360	0,3308	0,0101			

D'après cette Table, la résistance de l'air au mouvement des projectiles peut être regardée comme proportionnelle au carré de la vitesse, tant que cette dernière ne surpasse pas 230^m. La même proportionnalité peut encore être admise quand la vitesse surpasse 400^m.

§ 64. Calcul approximatif de la trajectoire moyenne — La formule (249) fait connaître comment varie le rapport de la résistance de l'air au carré de la vitesse. Il est intéressant de rechercher si, à l'aide de cette formule et en supposant la résistance de l'air toujours dirigée suivant la tangente à la courbe, il ne serait pas possible d'obtenir une détermination approximative de la trajectoire. L'idée qui se présente tout d'abord est de partager la courbe en arcs d'une étendue assez faible pour permettre l'emploi de certains procédés d'approximation. Considérant en particulier un de ces arcs, rien n'empêche de prendre son origine pour celle des coordonnées. Soient: x l'abscisse horizontale, y l'ordonnée verticale d'un point quelconque de la trajectoire, ψ l'inclinaison de la tangente en ce point, s la longueur de l'arc à partir de l'origine, w la vitesse tangentielle du mobile; à l'origine, on a:

$$x=0 \quad y=0 \quad s=0; \quad \text{soient:} \quad \psi=\psi_0 \quad \text{et} \quad w=w_0;$$

à l'extrémité, on a:

$$x=x_1 \quad y=y_1 \quad s=s_1 \quad \text{soient:} \quad \psi=\psi_1 \quad \text{et} \quad w=w_1;$$

Les valeurs de w_0 et de ψ_0 sont toujours données; celle de ψ_1 est prise arbitrairement. A l'aide de ces données, il faut calculer w_1, s_1, x_1 enfin y_1 . Telle est maintenant la question à résoudre.

§ 65. Formules d'approximation — Si la différence $\psi - \psi_0$ et, par suite, la longueur s , sont assez petites pour que le rapport de la résistance de l'air au carré de la vitesse n'éprouve, dans toute l'étendue de l'arc que de légères variations, on peut regarder ce rapport comme constant en lui attribuant une valeur moyenne.

Faisant donc $n=2$, et par suite $c=b$ dans les équations trouvées au § 26, il vient :

$$W^2 = \frac{W_0^2 \frac{\cos^2 \psi_0}{\cos^2 \psi}}{1 - \frac{2b}{g} W_0^2 \cos^2 \psi_0 \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}}.$$

D'ailleurs, d'après les formules (66), on a :

$$dx = -\frac{W^2}{g} d\psi,$$

et

$$dy = -\frac{W^2}{g} \operatorname{tg} \psi d\psi;$$

d'où il résulte :

$$ds = \frac{W^2}{g} \frac{d\psi}{\cos \psi},$$

et par suite :

$$ds = \frac{\frac{W_0^2 \cos^2 \psi_0}{g} \cdot \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}}{1 - \frac{2b}{g} W_0^2 \cos^2 \psi_0 \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}}$$

L'intégration donne immédiatement :

$$s = \frac{1}{2b} L \frac{\frac{g}{2b W_0^2 \cos^2 \psi_0} - \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}}{\frac{g}{2b W_0^2 \cos^2 \psi_0}}$$

la lettre L désignant un logarithme népérien. Prenant ψ_1 pour la seconde limite des intégrales, w devient w_1 et s devient s_1 , de sorte que l'on a :

$$w_1^2 = \frac{\frac{g}{2b \cos^2 \psi_1}}{\frac{g}{2b W_0^2 \cos^2 \psi_0} + \int_{\psi_1}^{\psi_0} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}}, \quad (250)$$

$$s_1 = \frac{1}{2b} L \frac{\frac{g}{2b W_0^2 \cos^2 \psi_0} + \int_{\psi_1}^{\psi_0} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}}{\frac{g}{2b W_0^2 \cos^2 \psi_0}} = \frac{2,30259}{2b} \log \frac{\frac{g}{2b W_0^2 \cos^2 \psi_0} + \int_{\psi_1}^{\psi_0} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}}{\frac{g}{2b W_0^2 \cos^2 \psi_0}}. \quad (251)$$

$\log$ désignant un logarithme vulgaire.

§ 66. Calcul de l'intégrale : $I = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}$ — Calculons d'abord l'intégrale indéfinie : $J = \int \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}$

Nous pouvons écrire :

$$\int \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = \int \frac{1}{\cos \psi} \cdot \frac{d\psi}{\cos^2 \psi}$$

Intégrons par parties, en posant :

$$u = \frac{1}{\cos \psi} \quad \text{et} \quad dv = \frac{d\psi}{\cos^2 \psi}; \quad \text{d'où :} \quad du = \frac{\sin \psi}{\cos^2 \psi} d\psi, \quad \text{et :} \quad v = \operatorname{tg} \psi$$

par suite : $\int \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos \psi} - \int \frac{\operatorname{tg} \psi \sin \psi}{\cos^2 \psi} d\psi$, et comme : $\int \frac{\operatorname{tg} \psi \sin \psi}{\cos^2 \psi} d\psi = \int \frac{\sin^2 \psi}{\cos^3 \psi} d\psi = \int \frac{1 - \cos^2 \psi}{\cos^3 \psi} d\psi = \int \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} - \int \frac{d\psi}{\cos \psi}$,

on en déduit : $\int \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos \psi} - \int \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} + \int \frac{d\psi}{\cos \psi}$, c'est-à-dire : $2J = 2 \int \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos \psi} + \int \frac{d\psi}{\cos \psi}$.

Or :

$$\int \frac{d\psi}{\cos \psi} = \int \frac{d\psi}{\sin(\frac{\pi}{2} - \psi)} = \int \frac{d\psi}{2 \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2})} = \int \frac{\frac{1}{2} d\psi}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2})} = -L \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}) = L \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2})}$$

donc à une constante près :

$$\int \frac{d\psi}{\cos \psi} = L \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}) = L \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}), \quad \text{et alors :} \quad 2J = 2 \int \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos \psi} + L \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}) + C^{\text{te}}.$$

finalement :

$$J = \int \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = \frac{\sin \psi}{2 \cos^2 \psi} + \frac{1}{2} L \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}) + C^{\text{te}} \quad (252)$$

L'intégrale définie I a donc pour valeur :

$$I = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = \frac{\sin \psi}{2 \cos^2 \psi} + \frac{1}{2} L \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right). \quad (253)$$

Nous en déduisons la Table suivante :

ψ	$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}$	ψ	$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}$	ψ	$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}$	ψ	$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}$	ψ	$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}$	ψ	$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}$
0°	0,000 00	16°	0,290 63	32°	0,663 43	48°	1,308 63	64°	3,071 50	80°	17,547 93
1	0,017 46	17	0,310 43	33	0,692 53	49	1,368 63	65	3,290 40	81	21,451 23
2	0,034 93	18	0,330 55	34	0,722 63	50	1,432 36	66	3,535 32	82	26,893 18
3	0,052 43	19	0,351 02	35	0,753 82	51	1,500 20	67	3,810 83	83	34,811 36
4	0,069 98	20	0,371 85	36	0,786 17	52	1,572 57	68	4,122 55	84	46,935 22
5	0,087 60	21	0,393 09	37	0,819 77	53	1,649 95	69	4,477 44	85	67,122 91
6	0,105 30	22	0,414 76	38	0,854 73	54	1,732 92	70	4,884 25	86	104,181 5
7	0,123 09	23	0,436 90	39	0,891 14	55	1,822 07	71	5,354 08	87	184,116 2
8	0,141 00	24	0,459 53	40	0,929 14	56	1,918 15	72	5,901 16	88	412,291 5
9	0,159 04	25	0,482 69	41	0,968 84	57	2,021 99	73	6,544 05	89	1 643, 690
10	0,177 24	26	0,506 43	42	1,010 39	58	2,134 56	74	7,307 22	90	∞
11	0,195 60	27	0,530 78	43	1,053 95	59	2,256 97	75	8,223 57		
12	0,214 15	28	0,555 80	44	1,099 68	60	2,390 33	76	9,338 07		
13	0,232 90	29	0,581 51	45	1,147 79	61	2,536 78	77	10,713 66		
14	0,251 89	30	0,607 99	46	1,198 49	62	2,697 52	78	12,440 41		
15	0,271 12	31	0,635 27	47	1,252 01	63	2,874 90	79	14,651 10		

On a toujours :

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = \int_0^{\psi_2} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} - \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}.$$

Il est dès lors facile de calculer, à l'aide de la Table, les valeurs de l'intégrale :

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}$$

qui entre dans les deux formules (250) et (251).

§ 67. Remarque. — La valeur de b est une moyenne entre toutes celles que ce coefficient peut affecter dans l'étendue de l'arc. En lui attribuant d'abord la valeur correspondant à la vitesse w_0 , on trouvera pour la vitesse finale w_1 une valeur que l'on peut représenter par w' . On prendra ensuite une moyenne entre les valeurs de b , qui correspondent aux vitesses w_0 et w' pour faire un autre calcul.

§ 68. Calcul de x , y et t . — Les coordonnées x et y sont des fonctions de l'arc s . La dérivée $\frac{dx}{ds}$, toujours positive, est croissante le long de la branche ascendante et décroissante tout le long de la branche descendante ; tandis que la dérivée $\frac{dy}{ds}$ toujours décroissante, est positive dans la branche ascendante et négative dans l'autre. On peut toujours supposer que l'un des points de division de la trajectoire se trouve au sommet de cette courbe ; alors, dans toute l'étendue de chaque arc, chacune des dérivées conserve le même signe et reste constamment croissante ou constamment décroissante.

Le rapport $\frac{x}{s}$ est toujours compris entre les deux valeurs que prend la dérivée $\frac{dx}{ds}$ aux deux extrémités de l'arc s .

On aura sans doute une approximation suffisante en lui attribuant une valeur égale à leur

moyenne arithmétique, du moins si la différence $\psi_1 - \psi_0$ n'est pas trop considérable.

On peut donc écrire :

$$\frac{x_1}{s_1} = \frac{\cos \psi_0 + \cos \psi_1}{2} = \cos \frac{\psi_0 + \psi_1}{2} \cos \frac{\psi_0 - \psi_1}{2},$$

et des considérations analogues conduisent à l'équation :

$$\frac{y_1}{s_1} = \frac{\sin \psi_0 + \sin \psi_1}{2} = \sin \frac{\psi_0 + \psi_1}{2} \cos \frac{\psi_0 - \psi_1}{2},$$

ce qui donne :

$$x_1 = s_1 \cos \frac{\psi_0 + \psi_1}{2} \cos \frac{\psi_0 - \psi_1}{2}, \quad (254)$$

et

$$y_1 = s_1 \sin \frac{\psi_0 + \psi_1}{2} \cos \frac{\psi_0 - \psi_1}{2}. \quad (255)$$

La durée t , du trajet est approximativement donnée par la formule :

$$t_1 = \frac{s_1}{\frac{w_0 + w_1}{2}} \quad (256)$$

Il faut tenir compte de la variation du poids du mètre cube d'air atmosphérique et faire usage de la formule :

$$\Delta = 1,292 \, 274 \, 3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Il est clair que les valeurs finales de ψ et de w dans un arc quelconque deviennent les valeurs initiales de l'arc suivant.

Quand on transporte l'origine des coordonnées au point de départ, l'extrémité du $n^{\text{ième}}$ arc a pour abscisse la somme des valeurs de x , qui correspondent aux n premiers arcs ; et, de même pour obtenir l'ordonnée de cette extrémité d'arc, il faut faire la somme algébrique des valeurs de y . Le calcul s'arrête nécessairement quand cette dernière somme devient négative.

Les ordonnées extrêmes du dernier arc sont alors de signes contraires, et il faut déterminer approximativement le point où il rencontre l'axe des abscisses.

On peut toujours faire en sorte que cet arc n'ait qu'une faible grandeur, et alors, admettant que, dans toute son étendue, les variations de l'abscisse, de la vitesse et de $\tan \psi$ sont sensiblement proportionnelles à celles de l'ordonnée, on obtiendra, avec une approximation suffisante la portée, l'angle de chute et la vitesse finale.

§ 69. Application — Appliquons la méthode précédente à la détermination de la trajectoire approximative du canon : 360 160 045, pour l'angle de projection égal à 45° , le lieu d'expérience étant supposé dans le massif de Saint-Gobain, où étaient d'ailleurs installées les pièces allemandes qui ont tiré sur Paris. Dorenavant nous désignerons celui par le signe : $\mathcal{X}$.

Les données du tir sont :

$\varphi = 45^\circ$,	$a = 0,360$,	$V = 1600^{\text{m}}$,	$p = 450^{\text{kg}}$.
Pour le lieu $\mathcal{X}$, on suppose :	$\varphi = 49^\circ \text{ N}$,	$z = 200^{\text{m}}$,	
par suite :	$\Xi = 0,941$	$\Delta = 1,216$.	

Dans ces conditions, les caractéristiques du tir sont :

$$\lambda \sin \gamma = 0,39, \quad \text{et} \quad \Lambda = \lambda \frac{a^2}{p} \sin \gamma = 0,000 \, 112.$$

L'accélération correspondant à la résistance de l'air étant représentée par : $b w^2$, sachant que :

$$b = \lambda \frac{a^2}{p} \sin \gamma \Delta \frac{f(w)}{\sin \gamma} = 0,000 \, 112 \Delta \frac{f(w)}{\sin \gamma},$$

attribuant au rapport $\frac{f(w)}{\sin \gamma}$, la valeur :

$$\frac{f(w)}{\sin \gamma} = 0,366,$$

on peut alors écrire :

$$b = 0,000 \, 112 \times 0,366 \Delta = 0,000 \, 040 \, 99 \Delta.$$

Premier arc:

$$\psi_0 = 45^\circ, \quad \psi_1 = 44^\circ,$$

$$w_0 = 1600^m$$

Calcul de w_1

On a:

Formule:

$$w_1' = \frac{\frac{g}{2b \cos^2 \psi_1}}{\frac{g}{2bw_0^2 \cos^2 \psi_0} + \int_{\psi_1}^{\psi_0} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}}$$

et

$$b = 0,000\,040\,99 \Delta$$

Soit:

$$\Delta = 1,216$$

alors:

$$b = 0,000\,049\,85$$

$$\log b = 5,697\,67$$

$$\log 2 = 0,301\,03$$

$$\log 2b = 5,998\,70$$

$$\log \frac{1}{2b} = 4,001\,30$$

$$\log g = 0,991\,67$$

$$\log \frac{g}{2b} = 4,992\,97$$

$$\log \frac{1}{\cos \psi_1} = \log \frac{1}{\cos 44^\circ} = 0,143\,07$$

$$\log \frac{1}{\cos^2 \psi_1} = 0,286\,14$$

$$\log \frac{g}{2bw_0^2 \cos^2 \psi_1} = 5,279\,11$$

$$\log w_0 = \log 1600 = 3,204\,12$$

$$\log w_0^2 = 6,408\,24$$

$$\log \frac{1}{\cos \psi_0} = \log \frac{1}{\cos 45^\circ} = 0,150\,51$$

$$\log \frac{1}{\cos^2 \psi_0} = 0,301\,02$$

$$\log \frac{1}{w_0^2} = 7,591\,76$$

$$\log \frac{g}{2b} = 4,992\,97$$

$$\log \frac{g}{2bw_0^2 \cos^2 \psi_0} = 2,885\,75$$

$$\operatorname{colog} \frac{g}{2bw_0^2 \cos^2 \psi_0} = 1,114\,25$$

$$\int_{44^\circ}^{45^\circ} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = 1,147\,79$$

$$\int_{44^\circ}^{44^\circ} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = 1,099\,68$$

$$\int_{44^\circ}^{45^\circ} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = 0,048\,11$$

$$0,048\,11$$

$$\frac{g}{2bw_0^2 \cos^2 \psi_0} = 0,076\,87$$

$$\frac{g}{2bw_0^2 \cos^2 \psi_0} - \int_{44^\circ}^{45^\circ} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = 0,124\,98$$

$$\log \left(\frac{g}{2bw_0^2 \cos^2 \psi_0} - \int_{44^\circ}^{45^\circ} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} \right) = 7,096\,84$$

$$\operatorname{colog} \left(\frac{g}{2bw_0^2 \cos^2 \psi_0} - \int_{44^\circ}^{45^\circ} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} \right) = 0,903\,16$$

$$\log \frac{g}{2b \cos^2 \psi_1} = 5,279\,11$$

$$\log w_1'^2 = 6,182\,27$$

$$\log w_1' = 3,091\,13$$

donc:

$$w_1' = 1234^m$$

Calcul de s_1

Formule:

$$s_1' = \frac{2,302\,59}{2b} \log \frac{\frac{g}{2bw_0^2 \cos^2 \psi_0} + \int_{\psi_1}^{\psi_0} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}}{\frac{g}{2bw_0^2 \cos^2 \psi_0}}$$

$$\log \left(\frac{g}{2bw_0^2 \cos^2 \psi_0} + \int_{44^\circ}^{45^\circ} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} \right) = 7,096\,84$$

$$\operatorname{colog} \frac{g}{2bw_0^2 \cos^2 \psi_0} = 1,114\,25$$

$$0,211\,09$$

$$\log 0,211\,09 = 7,324\,47$$

$$\log 2,302\,59 = 0,362\,22$$

$$\operatorname{colog} 2b = 4,001\,30$$

$$\log s_1' = 3,687\,99$$

donc:

$$s_1' = 4875^m$$

Calcul de x_1

Formule:

$$x_1' = s_1' \cos \frac{\psi_0 + \psi_1}{2} \cos \frac{\psi_0 - \psi_1}{2}$$

On doit prendre:

$$\frac{\psi_0 + \psi_1}{2} = 44^\circ 30', \quad \text{et} \quad \frac{\psi_0 - \psi_1}{2} = 0^\circ 30'$$

par suite:

$$\log s_1' = 3,687\,99$$

$$\log \cos 44^\circ 30' = 7,853\,24$$

$$\log \cos 0^\circ 30' = 7,999\,98$$

$$\log x_1' = 3,541\,21$$

donc:

$$x_1' = 3477^m$$

Calcul de y_1'

Formule:

$$y_1' = s_1' \sin \frac{\psi_0 + \psi_1}{2} \cos \frac{\psi_0 + \psi_1}{2}$$

On a:

$$\begin{aligned} \log. s_1' &= 3,687\,99 \\ \log. \sin 44^\circ 30' &= 7,845\,66 \\ \log. \cos 0^\circ 30' &= 0,999\,98 \\ \log y_1' &= 3,533\,63 \end{aligned}$$

donc:

$$y_1' = 3\,417^m$$

Calcul de t_1'

Formule:

$$t_1' = \frac{s_1'}{w_0 + w_1'}$$

On a:

$$\frac{w_0 + w_1'}{2} = \frac{1\,600 + 1\,234}{2} = \frac{2\,834}{2} = 1\,417$$

$$\begin{aligned} \log. 1\,417 &= 3,151\,37 \\ \text{colog. } 1\,417 &= 4,848\,63 \\ \log. s_1' &= 3,687\,99 \\ \log. t_1' &= 0,536\,62 \end{aligned}$$

donc

$$t_1' = 3^\circ,44'$$

En résumé, nous trouvons comme première approximation:

$$w_1' = 1\,234^m, \quad s_1' = 4\,875^m, \quad x_1' = 3\,477^m, \quad y_1' = 3\,417^m, \quad t_1' = 3^\circ,44',$$

mais à l'altitude de $3\,417 + 200 = 3\,617^m$, le poids du mètre cube d'air atmosphérique n'est plus que $0,844^{\text{kg}}$, ce qui fait attribuer pour l'arc considéré un poids moyen de $1^{\text{kg}},014$, obtenu en appliquant la théorie de Laplace. Or pour $\Delta = 1^{\text{kg}},014$, on trouve pour b la nouvelle valeur:

$$b = 0,000\,040\,99 \times 1,014 = 0,000\,041\,56.$$

Si nous faisons un calcul analogue à celui que nous venons d'exposer avec détails, en prenant pour b cette nouvelle valeur $0,000\,041\,56$, nous trouvons:

$$w_1'' = 1\,275^m, \quad s_1'' = 5\,052^m, \quad x_1'' = 3\,603^m, \quad y_1'' = 3\,540^m, \quad t_1'' = 3^\circ,51';$$

mais à l'altitude de $3\,540 + 200 = 3\,740^m$, le poids du mètre cube d'air atmosphérique n'est plus que $0,833^{\text{kg}}$, de telle sorte qu'il faut prendre pour poids moyen: $\Delta = 1^{\text{kg}},012$, et on obtient pour b :

$$b = 0,000\,040\,99 \times 1,012 = 0,000\,041\,48.$$

Un troisième calcul analogue donne en nombres ronds:

$$w_1''' = 1\,280^m, \quad s_1''' = 5\,060^m, \quad x_1''' = 3\,610^m, \quad y_1''' = 3\,550^m, \quad t_1''' = 3^\circ,52'.$$

Ce sont les nombres que nous adopterons pour: v_1, s_1, x_1, y_1 et t_1 .

$$\begin{aligned} v_1 &= 1\,280^m \\ s_1 &= 5\,060^m \\ x_1 &= 3\,610^m \\ y_1 &= 3\,550^m \\ t_1 &= 3^\circ,52' \end{aligned}$$

Deuxième arc:

$$\psi_0 = 44^\circ, \quad \psi_1 = 43^\circ, \quad w_0 = 1\,280^m$$

A l'altitude de:

$$3\,550 + 200 = 3\,750^m$$

le poids du mètre cube d'air atmosphérique est égal à $0^{\text{kg}},832$, il en résulte que:

$$b = 0,000\,040\,99 \times 0,832 = 0,000\,034\,10$$

En opérant comme pour le premier arc, après trois approximations, on trouve:

$$\begin{aligned} v_1 &= 1\,135^m \\ s_1 &= 3\,550^m \\ x_1 &= 2\,575^m \\ y_1 &= 2\,445^m \\ t_1 &= 2^\circ,94' \end{aligned}$$

En opérant ainsi de proche en proche, nous avons obtenu les résultats consignés dans la Table ci-après:

§ 70. Tableau des éléments des arcs successifs.

N° d'ordre	ψ_0	ψ_1	w_0	w_1	s	cumul S	x	cumul	y	cumul	t	cumul T	Δ_0	Δ_1	Δ_m	Altitudes des extrémités
Point de départ						0 ^m		0 ^m		0 ^m		0,00				200 ^m
1	45° 44'		1 600 ^m	1 280 ^m	5 060 ^m	5 060 ^m	3 610 ^m	3 610	3 550 ^m	3 550	3,52	3,52	1,216 ^{kg}	0,832 ^{kg}	1,012 ^{kg}	3 750
2	44 43		1 280	1 135	5 550	8 610	2 575	6 185	2 445	5 995	2,94	6,46	0,832	0,629	0,726	6 195
3	43 42		1 135	1 025	2 865	11 475	2 120	8 305	1 935	7 930	2,65	9,11	0,629	0,498	0,560	8 130
4	42 40		1 025	925	4 450	15 925	3 365	11 670	2 295	10 850	4,57	13,68	0,498	0,343	0,418	11 050
5	40 38		925	860	3 645	19 570	2 830	14 500	2 295	13 145	4,08	17,76	0,343	0,255	0,298	13 345
6	38 35		860	795	4 540	24 110	3 650	18 150	2 700	15 845	5,49	23,25	0,255	0,176	0,213	16 045
7	35 30		795	730	6 090	30 200	5 130	23 280	3 270	19 115	8,00	31,25	0,176	0,110	0,141	19 315
8	30 25		730	685	5 010	35 210	4 440	27 720	2 340	21 425	7,08	38,33	0,110	0,078	0,094	21 625
9	25 20		685	653	4 305	39 515	3 980	31 700	1 645	23 070	6,43	44,76	0,078	0,061	0,069	23 270
10	20 15		653	630	3 835	43 350	3 660	35 360	1 155	24 225	5,98	50,74	0,061	0,050	0,055	24 425
11	15 10		630	615	3 520	46 870	3 430	38 790	760	24 985	5,78	56,52	0,050	0,045	0,0475	25 185
12	10 5		615	605	3 330	50 200	3 300	42 090	435	25 420	5,46	61,98	0,045	0,042	0,0435	25 620
13	5 0		605	600	3 230	53 430	3 220	45 310	140	25 560	5,36	67,34	0,042	0,041	0,0415	25 760
14	0 - 5		600	599 ^{min}	3 190	56 620	3 190	48 500	- 135	25 425	5,33	72,67	0,041	0,042	0,0415	25 625
15	- 5 - 10		599 ^{min}	603	3 230	59 850	3 200	51 700	- 420	25 005	5,38	78,05	0,042	0,045	0,0435	25 203
16	- 10 - 15		603	610	3 350	63 200	3 270	54 970	- 725	24 280	5,53	83,58	0,045	0,050	0,0475	24 480
17	- 15 - 20		610	620	3 510	66 710	3 350	58 320	- 1 050	23 230	5,70	89,28	0,050	0,059	0,054	23 430
18	- 20 - 25		620	635	3 790	70 500	3 500	61 820	- 1 450	21 780	6,04	95,32	0,059	0,074	0,066	21 980
19	- 25 - 30		635	655	4 180	74 680	3 700	65 520	- 1 925	19 855	6,47	101,79	0,074	0,099	0,085	20 055
20	- 30 - 35		655	677	4 670	79 350	3 930	69 450	- 2 505	17 350	7,01	108,80	0,099	0,143	0,120	17 550
21	- 35 - 40		677	695	5 270	84 620	4 180	73 630	- 3 205	14 145	7,69	116,49	0,143	0,223	0,190	14 345
22	- 40 - 45		695	702	5 875	90 495	4 330	77 960	- 3 965	10 180	8,42	124,91	0,223	0,375	0,294	10 380
23	- 45 - 50		702	681	6 240	96 735	4 210	82 170	- 4 600	5 580	9,06	133,97	0,375	0,661	0,508	5 780
24	- 50 - 53		681	652	3 810	100 545	2 380	84 550	- 2 980	2 600	9,76	139,73	0,661	0,926	0,770	2 800
25	- 53 - 54		652	643	1 210	101 755	720	85 270	- 1 010	1 590	1,96	141,68	0,926	1,027	0,975	1 790
26	- 54 - 55		643	625	1 180	102 935	680	85 950	- 960	630	1,92	143,60	1,027	1,150	1,087	830
27	- 55 - 55 ³⁵		625	620	765	103 700	450	86 400	- 630	0	1,27	144,87	1,150	1,216	1,182	200
Point de chute			620			103 700		86 400		0		144,87				200

Il résulte des calculs précédents qu'au point de chute, on a :

$$\text{Portée: } X = 86\,400^m$$

$$\text{Angle de chute: } \omega = 55^\circ 35'$$

$$\text{Vitesse restante tangentielle: } v = 620^m$$

$$\text{Durée totale de trajet: } T = 144,87$$

$$\text{Abscisse du sommet: } X_s = 45\,310^m$$

$$\text{Flèche: } Y = 25\,560^m$$

Nous donnons ci-après (fig. 20) le graphique de cette trajectoire, à l'échelle de : $\frac{1}{400\,000}$;

1 centimètre du dessin représentant donc 4 000 mètres, ou

1 millimètre " " 400 " "

§71. Trajectoire

du carton

360 160 045

 $\alpha = 45^\circ$

1 millimètre représente 400 mètres.

Echelle de

1 centimètre représente 4 000 mètres

Projector

Altitudes no

Altitudes	200	200
008	200	200
010	200	200
012	200	200
014	200	200
016	200	200
018	200	200
020	200	200
022	200	200
024	200	200
026	200	200
028	200	200
030	200	200
032	200	200
034	200	200
036	200	200
038	200	200
040	200	200
042	200	200
044	200	200
046	200	200
048	200	200
050	200	200
052	200	200
054	200	200
056	200	200
058	200	200
060	200	200
062	200	200
064	200	200
066	200	200
068	200	200
070	200	200
072	200	200
074	200	200
076	200	200
078	200	200
080	200	200
082	200	200
084	200	200
086	200	200
088	200	200
090	200	200
092	200	200
094	200	200
096	200	200
098	200	200
100	200	200

Sommet.

Fläche = 25 560^m

54

1

1

1

Valours de $y = y - y_0$

Cumul des ψ et ψ

Général des x ψ_0 et ψ_1

Fig. 20

§72. Remarque — Les calculs que nous venons de faire sur le canon 360 160 045 supposent que le projectile est nu et que le demi-angle de son ogive est de 30° environ.

Si, comme on l'a fait, ces temps derniers, ce projectile est muni d'une coiffe en tôle très allongée et terminée en pointe, et si de plus son culot est de forme fuyante de façon que le phénomène de la cavitation, dont nous parlerons plus loin soit supprimé, comme nous le ferons voir, la portée est bien augmentée et peut être portée à :

$$86\,400^m \times 1,40 = 120\,960^m$$

Avec un tel projectile on obtient facilement la portée extraordinaire de

120 kilomètres environ,

qui est celle qui a été obtenue par les canons allemands qui d'ailleurs X ont tiré sur Paris.

Nous reviendrons du reste plus loin sur cette importante question.

§73. Application de la formule de Gâvre pour la détermination de Ψ

Reprenons la formule de la Commission de Tir de Gâvre :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V^2} + K x \right),$$

qui donne la portée X , quand on y fait :

$$y = 0,$$

et qu'on supprime la solution :

$$\alpha = 0.$$

Cette équation donne alors :

$$\operatorname{tg} \alpha - \frac{g X}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V^2} + K X \right) = 0,$$

ou encore :

$$2 \sin \alpha \cos \alpha - \frac{g X}{V^2} - g K X^2 = 0,$$

et finalement :

$$\sin 2\alpha = \frac{g X}{V^2} + g K X^2.$$

Cette équation résolue par rapport à K donne :

$$K = \frac{\sin 2\alpha}{g X^2} - \frac{1}{V^2 X},$$

Dans le cas particulier où :

$$\alpha = 45^\circ,$$

on trouve :

$$K = \frac{1}{g X^2} - \frac{1}{V^2 X} = \frac{V^2 - g X}{g V^2 X^2}. \quad (257)$$

Appliquons cette formule (257) au canon 360 160 045, sachant que pour : $\alpha = 45^\circ$

on a :

$$X = 86\,400^m$$

et comme, d'autre part :

$$V = 1\,600^m$$

et :

$$g = 9^m,81$$

nous trouvons ainsi :

$$K = \frac{2\,560\,000 - 847\,584}{187\,472\,019\,456\,000\,000} = 0,000\,000\,000\,009\,444$$

Il en résulte que :

$$10^{10} K = 0,09444.$$

Or nous savons que :

$$10^{10} K = 1,292\,274\,3 \Xi \times \Lambda \times \mathcal{N} \times \Psi$$

et comme pour le canon en question et dans les conditions susdites du tir :

$$\Xi = 0,941,$$

$$\Lambda = 0,000\,112,$$

$$\mathcal{N} = 0,828\,6 \mathcal{N} = 3\,346,$$

par conséquent :

$$0,09444 = 1,292\,274\,3 \times 0,941 \times 0,000\,112 \times 3\,346 \times \Psi = 0,455\,698 \Psi,$$

On en déduit :

$$\Psi = \frac{0,09444}{0,455\,698},$$

et en effectuant, on trouve :

$$\boxed{\Psi = 0,208}$$

574. Valeurs de la fonction Ψ pour $\alpha=45$, $\varphi=45^\circ$ et $z=0^m$ — Nous venons de voir comment on peut calculer la fonction perturbatrice Ψ dans des conditions de tir déterminées. La Table ci-dessous contient les valeurs de cette fonction, calculées, comme il vient d'être exposé, en supposant: $\alpha=45^\circ$, $\varphi=45^\circ$ et $z=0^m$, lorsque la vitesse varie de 700^m à 2500^m, l'argument étant égal à 100^m; et que le paramètre de forme Λ varie de 0,000 040 à 0,000 400, l'argument étant égal à 0,000 010. Nous désignerons cette fonction spéciale par: $\Psi_{45,45}^\circ$.

$\gamma \backslash \lambda$	700 ^m	800 ^m	900 ^m	1 000 ^m	1 100 ^m	1 200 ^m	1 300 ^m	1 400 ^m	1 500 ^m	1 600 ^m	1 700 ^m	1 800 ^m	1 900 ^m	2 000 ^m	2 100 ^m	2 200 ^m	2 300 ^m	2 400 ^m	2 500 ^m
0,000 040						0,244	0,192	0,166	0,147	0,135	0,120	0,109	0,100	0,091	0,086	0,082	0,078	0,075	0,073
0,000 050						0,262	0,208	0,179	0,160	0,144	0,131	0,119	0,108	0,100	0,094	0,088	0,084	0,080	0,077
60						0,277	0,221	0,193	0,171	0,154	0,140	0,127	0,117	0,108	0,101	0,094	0,089	0,085	0,081
70				0,398	0,362	0,293	0,236	0,206	0,183	0,165	0,150	0,137	0,126	0,119	0,109	0,101	0,094	0,089	0,085
80				0,418	0,378	0,309	0,251	0,220	0,195	0,176	0,161	0,146	0,135	0,125	0,116	0,107	0,100	0,094	0,089
90				0,436	0,393	0,323	0,266	0,233	0,208	0,188	0,171	0,157	0,145	0,135	0,125	0,115	0,107	0,100	0,095
0,000 100	0,545	0,516	0,485	0,451	0,409	0,339	0,280	0,247	0,220	0,200	0,182	0,168	0,155	0,144	0,133	0,123	0,114	0,106	0,100
110	0,551	0,524	0,494	0,463	0,419	0,352	0,294	0,258	0,232	0,211	0,193	0,177	0,164	0,152	0,140	0,130	0,123	0,117	0,105
120	0,559	0,532	0,503	0,473	0,431	0,365	0,309	0,272	0,244	0,224	0,205	0,188	0,173	0,161	0,149	0,138	0,127	0,118	0,110
130	0,566	0,540	0,512	0,483	0,441	0,378	0,322	0,284	0,256	0,235	0,214	0,198	0,184	0,171	0,158	0,146	0,135	0,124	0,116
140	0,573	0,548	0,520	0,491	0,451	0,390	0,335	0,297	0,268	0,246	0,226	0,208	0,196	0,180	0,166	0,154	0,143	0,132	0,122
0,000 150	0,578	0,554	0,527	0,498	0,459	0,402	0,346	0,309	0,279	0,257	0,236	0,219	0,204	0,190	0,175	0,163	0,151	0,139	0,128
160	0,585	0,561	0,534	0,506	0,467	0,414	0,359	0,321	0,293	0,269	0,248	0,230	0,214	0,199	0,184	0,172	0,160	0,147	0,135
170	0,589	0,567	0,541	0,512	0,474	0,425	0,370	0,333	0,304	0,280	0,259	0,242	0,225	0,208	0,193	0,181	0,167	0,154	0,143
180	0,598	0,574	0,547	0,518	0,482	0,434	0,381	0,345	0,316	0,291	0,271	0,253	0,235	0,218	0,202	0,188	0,175	0,162	0,150
190	0,604	0,580	0,553	0,524	0,488	0,443	0,392	0,356	0,327	0,303	0,282	0,264	0,247	0,227	0,212	0,197	0,184	0,170	0,158
0,000 200	0,609	0,585	0,559	0,529	0,495	0,451	0,402	0,368	0,340	0,315	0,294	0,275	0,258	0,237	0,221	0,206	0,191	0,177	0,164
210	0,615	0,590	0,564	0,534	0,500	0,458	0,411	0,377	0,351	0,326	0,305	0,285	0,268	0,245	0,230	0,213	0,199	0,185	0,171
220	0,620	0,596	0,568	0,539	0,505	0,465	0,420	0,388	0,362	0,337	0,316	0,296	0,277	0,255	0,238	0,221	0,206	0,191	0,178
230	0,627	0,600	0,573	0,543	0,509	0,471	0,429	0,398	0,373	0,348	0,326	0,307	0,286	0,263	0,247	0,228	0,213	0,199	0,185
240	0,632	0,604	0,577	0,547	0,512	0,476	0,438	0,408	0,384	0,360									
0,000 250	0,637	0,610	0,581	0,550	0,516	0,481	0,447	0,418	0,397	0,372									
260	0,642	0,614	0,584	0,552	0,519	0,485													
270	0,647	0,618	0,587	0,555	0,522	0,490													
280	0,651	0,621	0,590	0,557	0,524	0,493													
290	0,656	0,625	0,593	0,559	0,526	0,497													
0,000 300	0,660	0,628	0,595	0,561	0,528	0,500													
310	0,667	0,635																	
320	0,669	0,635																	
330	0,673	0,638																	
340	0,676	0,641																	
0,000 350	0,680	0,643																	
360	0,683	0,645																	
370	0,686	0,647																	
380	0,688	0,649																	
390	0,690	0,651																	
0,000 400	0,693	0,652																	

§75. Variation de la fonction Ψ avec la latitude φ — Si dans la fonction $\Psi_{\alpha, \varphi}^z$ nous supposons: $\alpha = 45^\circ$ et $z = 0^m$, et si nous étudions comment varie $\Psi_{45, \varphi}^0$, lorsque φ varie, nous constatons que cette variation est donnée par la formule simple:

$$\Psi_{45, \varphi}^0 = \Psi_{45, 45}^0 \times \left(1,045 - \frac{\varphi}{1000}\right) \quad (258)$$

φ étant exprimé en degrés et fraction décimale de degrés. Dans le tableau ci-dessous, nous donnons les valeurs du facteur correctif:

quand φ varie de 0° à 90° , l'argument étant 1°.

φ	$1,045 - \frac{\varphi}{1000}$	φ	$1,045 - \frac{\varphi}{1000}$	φ	$1,045 - \frac{\varphi}{1000}$	φ	$1,045 - \frac{\varphi}{1000}$	φ	$1,045 - \frac{\varphi}{1000}$	φ	$1,045 - \frac{\varphi}{1000}$	φ	$1,045 - \frac{\varphi}{1000}$
0°	1,045	13°	1,032	26°	1,019	39°	1,006	52°	0,993	65°	0,980	78°	0,967
1	1,044	14	1,031	27	1,018	40	1,005	53	0,992	66	0,979	79	0,966
2	1,043	15	1,030	28	1,017	41	1,004	54	0,991	67	0,978	80	0,965
3	1,042	16	1,029	29	1,016	42	1,003	55	0,990	68	0,977	81	0,964
4	1,041	17	1,028	30	1,015	43	1,002	56	0,989	69	0,976	82	0,963
5	1,040	18	1,027	31	1,014	44	1,001	57	0,988	70	0,975	83	0,962
6	1,039	19	1,026	32	1,013	45	1,000	58	0,987	71	0,974	84	0,961
7	1,038	20	1,025	33	1,012	46	0,999	59	0,986	72	0,973	85	0,960
8	1,037	21	1,024	34	1,011	47	0,998	60	0,985	73	0,972	86	0,959
9	1,036	22	1,023	35	1,010	48	0,997	61	0,984	74	0,971	87	0,958
10	1,035	23	1,022	36	1,009	49	0,996	62	0,983	75	0,970	88	0,957
11	1,034	24	1,021	37	1,008	50	0,995	63	0,982	76	0,969	89	0,956
12	1,033	25	1,020	38	1,007	51	0,994	64	0,981	77	0,968	90	0,955

§76. Variation de la fonction Ψ avec l'angle de projection α — Si dans la fonction $\Psi_{\alpha, \varphi}^z$ nous supposons: $\varphi = 45^\circ$ et $z = 0^m$

et si nous faisons varier α dans les limites qui nous intéressent: savoir de 35° à 55° , nous constatons que cette variation est donnée par la formule:

$$\Psi_{\alpha, 45}^0 = \Psi_{45, 45}^0 \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \varepsilon(\alpha) \right], \quad (259)$$

dans laquelle $\varepsilon(\alpha)$ est une certaine fonction de α dont nous donnons ci-après les valeurs.

α	$\varepsilon(\alpha)$	$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \varepsilon(\alpha)$	α	$\varepsilon(\alpha)$	$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \varepsilon(\alpha)$	α	$\varepsilon(\alpha)$	$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \varepsilon(\alpha)$
35°	0,96	1,37	42°	0,98	1,09	49°	1,05	0,91
36	0,96	1,32	43	0,98	1,05	50	1,07	0,90
37	0,96	1,27	44	0,99	1,03	51	1,09	0,88
38	0,96	1,23	45	1,00	1,00	52	1,10	0,86
39	0,97	1,20	46	1,01	0,98	53	1,11	0,84
40	0,97	1,16	47	1,02	0,95	54	1,13	0,82
41	0,97	1,12	48	1,03	0,93	55	1,15	0,81

§77. Variation de la fonction Ψ avec l'altitude z — Si enfin dans la fonction $\Psi_{\alpha, \varphi}^z$, nous supposons: $\alpha = 45^\circ$ et $\varphi = 45^\circ$ et si nous faisons varier z de 0^m à $5\,000^m$, nous trouvons que dans ces limites, on a:

$$\Psi_{45, 45}^z = \Psi_{45, 45}^0 \left(1 - \frac{z}{8\,000 + z} \right).$$

La Table ci-après donne les valeurs du facteur correctif

$$1 - \frac{z}{8\,000 + z}, \quad \text{l'argument étant égal à } 100^m.$$

z	$1 - \frac{z}{8000+z}$	z	$1 - \frac{z}{8000+z}$	z	$1 - \frac{z}{8000+z}$	z	$1 - \frac{z}{8000+z}$	z	$1 - \frac{z}{8000+z}$	z	$1 - \frac{z}{8000+z}$
0 ^m	1,000	900 ^m	0,899	1800 ^m	0,816	2700 ^m	0,748	3600 ^m	0,690	4500 ^m	0,640
100	0,988	1000	0,889	1900	0,808	2800	0,741	3700	0,684	4600	0,635
200	0,976	1100	0,879	2000	0,800	2900	0,734	3800	0,678	4700	0,630
300	0,964	1200	0,870	2100	0,792	3000	0,727	3900	0,672	4800	0,625
400	0,952	1300	0,860	2200	0,784	3100	0,721	4000	0,667	4900	0,620
500	0,941	1400	0,851	2300	0,777	3200	0,714	4100	0,661	5000	0,615
600	0,930	1500	0,842	2400	0,769	3300	0,708	4200	0,656		
700	0,920	1600	0,833	2500	0,762	3400	0,702	4300	0,650		
800	0,909	1700	0,825	2600	0,755	3500	0,696	4400	0,645		

§78. Forme définitive de la fonction perturbatrice Ψ — Il résulte de toute cette discussion que si $\Psi_{45,45}^{\circ}$ désigne la valeur de la fonction Ψ pour un canon déterminé et dans les conditions de tir définies par : $\alpha = 45^{\circ}$, $\varphi = 45^{\circ}$ et $z = 0^m$, valeur d'ailleurs fournie par la Table du §74, que pour ce même canon et dans les nouvelles conditions de tir définies par l'angle de projection α , la latitude φ et l'altitude z , la valeur correspondante de la fonction Ψ est donnée par la formule générale :

$$\Psi = \Psi_{45,45}^{\circ} \times \left(1,045 - \frac{\varphi}{1000}\right) \left[\lg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \zeta(\alpha) \right] \left(1 - \frac{z}{8000+z}\right) \quad (260)$$

cette formule est valable pour n'importe quelle valeur de φ ,

et pour :

$$35^{\circ} \leq \alpha \leq 55^{\circ}$$

avec

$$z \leq 5000^m$$

§79. Application au canon 360 160 045 — Nous savons que pour ce canon : $\Lambda = 0,000112$. La Table du §74 donne par interpolation :

$$\Psi_{45,45}^{\circ} = 0,2136$$

Soit $\alpha = 45^{\circ}$. Si de plus X est le lieu d'expérience, on a : $\varphi = 49^{\circ} N$, et $z = 200^m$, donc :

$$1,045 - \frac{\varphi}{1000} = 0,996, \quad \text{et} : \quad 1 - \frac{z}{8000+z} = 0,976,$$

desorte que :

$$\Psi_{45,49}^{200} = 0,2136 \times 0,996 \times 0,976 = 0,208$$

nombre trouvé au §73.

§80. Forme définitive du paramètre K — Nous pouvons maintenant donner la forme définitive du paramètre K qui entre dans la formule :

$$y = x \lg \alpha - \frac{g x^2}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V^2} + Kx \right).$$

Nous pouvons écrire :

$$10^{10} K = 1,2922743 \times \Lambda \times A' \times \Xi \times \Psi; \quad (261)$$

dans cette formule :

$$\Lambda = \lambda \frac{a^2}{p} \sin \gamma,$$

$$A' = N \sec \alpha - M \sin \text{verse } \alpha.$$

Ξ est donné par la Table du §59, et enfin

$$\Psi = \Psi_{45,45}^{\circ} \times \left(1,045 - \frac{\varphi}{1000}\right) \left[\lg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \zeta(\alpha) \right] \left(1 - \frac{z}{8000+z}\right),$$

$\Psi_{45,45}^{\circ}$ étant donné par la Table du §74. Il en résulte que l'on a définitivement :

$$10^{10} K = 1,2922743 \times \lambda \frac{a^2}{p} \sin \gamma \times (N \sec \alpha - M \sin \text{verse } \alpha) \times \Xi \times \Psi_{45,45}^{\circ} \times \left(1,045 - \frac{\varphi}{1000}\right) \left[\lg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \zeta(\alpha) \right] \left(1 - \frac{z}{8000+z}\right) \quad (262)$$

Si en particulier : $\alpha = 45^{\circ}$, $\varphi = 45^{\circ}$ et $z = 0^m$, on a simplement :

$$10^{10} K = 1,0708 \times \lambda \frac{a^2}{p} \sin \gamma \times N \times \Xi \times \Psi_{45,45}^{\circ} \quad (263)$$

Pour le canon 360 160 045, si $\alpha = 45^{\circ}$, $\varphi = 49^{\circ} N$, et $z = 200^m$, on a :

$$10^{10} K = 0,0944.$$

Chapitre XLV

Angle de portée maximum

§ 81. Détermination de l'angle de portée maximum. — Dans le § 57, nous avons démontré l'existence d'un angle de portée maximum. Nous nous proposons maintenant de déterminer la valeur de cet angle pour divers types de canon.

1^{er} Canon 200 080 007. — Pour ce canon: $a = 0,200$, $V = 800^m$, $p = 7^{kg}$, alors: $\Lambda = 0,000400$, supposons que pour le lieu d'expérience: $\varphi = 45^\circ$, et $z = 0^m$;

par suite: $M = 16\,143$, $N = 8\,075$, $\Xi = 0,955$, $\Psi = 0,652$;

et on a: $10^{10}K = 1,292\,2743 \cdot \Lambda (8\,075 \sec \alpha - 16\,143 \sin \text{verse } \alpha) \Xi \cdot \Psi \cdot \lg(\frac{\pi}{2} - \alpha) \zeta(\alpha) = 0,000\,321\,85 (8\,075 \sec \alpha - 16\,143 \sin \text{verse } \alpha) \lg(\frac{\pi}{2} - \alpha) \zeta(\alpha)$

Nous trouvons les portées suivantes:

α	50°	51°	52°	53°	54°	55°	α
X	18 890 ^m	18 990 ^m	19 018 ^m	18 990 ^m	18 925 ^m	18 812 ^m	X

Donc, pour le canon 200 080 007, l'angle de portée maximum est: $\alpha_m = 52^\circ 10'$ et on a: $X_m = 19\,020^m$.

2^e Canon 280 120 022,5. — Pour ce canon: $a = 0,280$, $V = 1200^m$, $p = 225^{kg}$, alors: $\Lambda = 0,000160$, supposons que pour le lieu d'expérience: $\varphi = 45^\circ$, et $z = 0^m$;

par suite: $M = 10\,766$, $N = 5\,383$, $\Xi = 0,955$, $\Psi = 0,414$;

et on a: $10^{10}K = 1,292\,2743 \cdot \Lambda (5\,383 \sec \alpha - 10\,766 \sin \text{verse } \alpha) \Xi \cdot \Psi \cdot \lg(\frac{\pi}{2} - \alpha) \zeta(\alpha) = 0,000\,081\,75 (5\,383 \sec \alpha - 10\,766 \sin \text{verse } \alpha) \lg(\frac{\pi}{2} - \alpha) \zeta(\alpha)$

Nous trouvons les portées suivantes:

α	50°	51°	52°	53°	54°	55°	α
X	45 445 ^m	45 530 ^m	45 576 ^m	45 557 ^m	45 456 ^m	45 067 ^m	X

Donc, pour le canon 280 120 022,5, l'angle de portée maximum est: $\alpha_m = 52^\circ 20'$ et on a: $X_m = 45\,585^m$.

3^e Canon 360 160 045. — Pour ce canon: $a = 0,360$, $V = 1600^m$, $p = 450^{kg}$, alors: $\Lambda = 0,000112$, supposons que pour le lieu d'expérience: $\varphi = 45^\circ$, et $z = 0^m$;

par suite: $M = 8\,075$, $N = 4\,038$, $\Xi = 0,955$, $\Psi = 0,2156$;

et on a: $10^{10}K = 1,292\,2743 \cdot \Lambda (4\,038 \sec \alpha - 8\,075 \sin \text{verse } \alpha) \Xi \cdot \Psi \cdot \lg(\frac{\pi}{2} - \alpha) \zeta(\alpha) = 0,000\,029\,52 (4\,038 \sec \alpha - 8\,075 \sin \text{verse } \alpha) \lg(\frac{\pi}{2} - \alpha) \zeta(\alpha)$

Nous trouvons les portées suivantes:

α	50°	51°	52°	53°	54°	55°	α
X	86 020 ^m	86 245 ^m	86 255 ^m	86 145 ^m	85 850 ^m	85 188 ^m	X

Donc, pour le canon 360 160 045, l'angle de portée maximum est: $\alpha_m = 51^\circ 40'$ et on a: $X_m = 86\,250^m$.

4^e Canon 440 200 088. — Pour ce canon: $a = 0,440$, $V = 2000^m$, $p = 880^{kg}$, alors: $\Lambda = 0,000077$, supposons que pour le lieu d'expérience: $\varphi = 45^\circ$, et $z = 0^m$;

par suite: $M = 6\,460$, $N = 3\,230$, $\Xi = 0,955$, $\Psi = 0,1232$;

et on a: $10^{10}K = 1,292\,2743 \cdot \Lambda (3\,230 \sec \alpha - 6\,460 \sin \text{verse } \alpha) \Xi \cdot \Psi \cdot \lg(\frac{\pi}{2} - \alpha) \zeta(\alpha) = 0,000\,011\,71 (3\,230 \sec \alpha - 6\,460 \sin \text{verse } \alpha) \lg(\frac{\pi}{2} - \alpha) \zeta(\alpha)$

Nous trouvons les portées suivantes:

α	50°	51°	52°	53°	54°	55°	α
X	148 625 ^m	148 920 ^m	148 895 ^m	148 730 ^m	148 715 ^m	146 575 ^m	X

Donc, pour le canon 440 200 088, l'angle de portée maximum est: $\alpha_m = 51^\circ 30'$ et on a: $X_m = 148\,935^m$.

5^e Canon 520 240 167. — Pour ce canon: $a = 0,520$, $V = 2400^m$, $p = 1670^{kg}$, alors: $\Lambda = 0,000053$, supposons que pour le lieu d'expérience: $\varphi = 45^\circ$, et $z = 0^m$;

par suite: $M = 5\,383$, $N = 2\,691$, $\Xi = 0,955$, $\Psi = 0,0815$;

et on a: $10^{10}K = 1,292\,2743 \cdot \Lambda (2\,691 \sec \alpha - 5\,383 \sin \text{verse } \alpha) \Xi \cdot \Psi \cdot \lg(\frac{\pi}{2} - \alpha) \zeta(\alpha) = 0,000\,005\,33 (2\,691 \sec \alpha - 5\,383 \sin \text{verse } \alpha) \lg(\frac{\pi}{2} - \alpha) \zeta(\alpha)$

Nous trouvons les portées suivantes:

α	50°	51°	52°	53°	54°	55°	α
X	234 434 ^m	234 788 ^m	234 750 ^m	234 425 ^m	233 861 ^m	231 737 ^m	X

Donc, pour le canon 520 240 167, l'angle de portée maximum est: $\alpha_m = 51^\circ 20'$ et on a: $X_m = 234 800^m$.

En résumé, nous constatons que quel que soit le canon, l'angle de portée maximum α_m est dans le voisinage de 52°.

Nous avons en effet trouvé pour:

le canon 200 080 007	$\alpha_m = 52^\circ 10'$	avec	$X_m = 19 020^m$
le canon 280 120 022,5	$\alpha_m = 52^\circ 20'$	"	$X_m = 45 585^m$
le canon 360 160 045	$\alpha_m = 51^\circ 40'$	"	$X_m = 86 250^m$
le canon 440 200 088	$\alpha_m = 51^\circ 30'$	"	$X_m = 148 935^m$
le canon 520 240 167	$\alpha_m = 51^\circ 20'$	"	$X_m = 234 800^m$

Nous en déduisons pour l'angle de portée maximum la valeur moyenne:

$$\alpha_m = 51^\circ 48'$$

Sans erreur sensible, nous pourrions adopter:

$$\alpha_m = 51^\circ 50'$$

car dans le voisinage d'un maximum la fonction X varie très peu.

§ 82- Application — Soit encore le canon 360 160 045 pour lequel:

$$a = 0^m, 360,$$

$$V = 1600^m,$$

$$p = 450^{kg},$$

par suite:

$$\Lambda = 0,000 412,$$

$$M = 8 075,$$

$$N = 4 038,$$

Si nous supposons le lieu d'expérience défini par les données:

$$\varphi = 49^\circ$$

$$z = 200^m$$

ce lieu est le point X; nous savons que:

$$\Xi = 0,941,$$

et

$$\Psi_{45,45}^{200} = 0,208;$$

il en résulte pour $10^{10} K$:

$$10^{10} K = 1,292 2743 \cdot \Lambda \cdot (4 038 \sec \alpha - 8 075 \sin \text{verse } \alpha) \cdot \Xi \cdot \Psi_{45,45}^{200} \cdot \lg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \tau(\alpha);$$

d'où:

$$10^{10} K = 0,000 028 35 \cdot (4 038 \sec \alpha - 8 075 \sin \text{verse } \alpha) \cdot \lg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \tau(\alpha),$$

ou encore:

$$10^{10} K = 0,000 028 35 \cdot (4 038 \sec \alpha - 8 075 \sin \text{verse } \alpha) \cdot \cotg \alpha \cdot \tau(\alpha).$$

Prenons, comme nous venons de dire, pour l'angle de portée maximum:

$$\alpha_m = 51^\circ 50',$$

pour lequel:

$$\cos \alpha_m = 0,617 95,$$

$$1 - \cos \alpha_m = 0,382 05,$$

$$\sin 2\alpha_m = 0,971 69;$$

nous trouvons:

$$10^{10} K = 0,083 917;$$

et la formule:

$$\lg \alpha_m = \frac{g X_m}{2 \cos^2 \alpha_m} \left(\frac{1}{V^2} + K X_m \right)$$

résolue par rapport à X_m donne:

$$X_m = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 - 2KV^2 \frac{2V^2 \sin 2\alpha_m}{g}} - 1 \right).$$

et en appliquant cette formule au cas qui nous occupe, nous trouvons:

$$X_m = 87 837^m$$

Au § 70 nous avons trouvé pour ce canon et dans les mêmes conditions de tir: ($\varphi = 49^\circ$ et $z = 200^m$)

pour l'angle de projection:

$$\alpha = 45^\circ,$$

la portée:

$$X = 86 400^m;$$

d'où une augmentation de portée de 1 437^m, soit plus de 1 400^m, ce qui n'est pas négligeable.

Chapitre XV

Calcul des éléments essentiels du tir.

§ 83. Des éléments essentiels du tir — Etablir une Table de tir se rapportant à un canon donné, dans des conditions déterminées et pour un lieu fixé d'avance, c'est calculer tout un ensemble de nombres pour lesquels existe la plus grande probabilité d'être obtenus quand on exécute un tir avec ce canon, dans les conditions balistiques prévues et les conditions moyennes météorologiques connues du lieu d'expérience. On prend généralement la portée pour argument. Dans une première colonne verticale, on inscrit les différentes valeurs de la portée X qui forment une progression arithmétique, dont la raison est l'argument ou la différence tabulaire. Dans une seconde colonne, on inscrit les valeurs correspondantes d'une certaine quantité auxiliaire S définie par la relation: $KV^2X = S$ dont nous parlerons bientôt et dont la connaissance est très utile pour le calcul des éléments du tir. Dans une série d'autres colonnes, on inscrit les valeurs correspondantes des autres éléments du tir, que l'on peut ainsi classer:

- | | | | | | |
|---|---|---|---|--|---|
| I. <u>Éléments de pointage</u>
ou <u>graduations</u> | } Les éléments concernent: | la <u>hausse</u> : H ,
la <u>dérive</u> : d , | | | |
| II. <u>Éléments essentiels</u> | | <u>Angle de projection</u> : α
<u>Inclinaison</u> λ à donner à la pièce,
<u>Dérivation</u> D , dont la connaissance sert au pointage de la pièce,
<u>Durée totale du trajet</u> T , dont la connaissance sert au débouchage de l'évent,
<u>Angle de chute</u> : ω , | | | |
| III. <u>Éléments accessoires</u> | } Vitesses restantes au point de chute: | <u>tangentielle</u> : v ,
<u>horizontale</u> : v' ,
<u>verticale</u> : v'' ,
<u>Energie cinétique</u> E du projectile au point de chute;
<u>Flèche de la trajectoire</u> : y , | | | |
| IV. <u>Éléments complémentaires</u> | | <u>zones dangereuses</u> $\tilde{z}$ pour: <table border="0" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td style="padding: 0 5px;">{</td> <td style="padding: 0 5px;">l'<u>infanterie</u>: $\tilde{z}_i$,</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 5px;">{</td> <td style="padding: 0 5px;">la <u>cavalerie</u>: $\tilde{z}_c$,</td> </tr> </table>
<u>Épaisseur de plaque en fer ou en acier</u> traversée par le projectile. | { | l' <u>infanterie</u> : $\tilde{z}_i$, | { |
| { | l' <u>infanterie</u> : $\tilde{z}_i$, | | | | |
| { | la <u>cavalerie</u> : $\tilde{z}_c$, | | | | |

Pour ce qui nous concerne, nous envisagerons les éléments essentiels suivants:

- 1° la portée X qui correspond à un angle de projection donné α ,
- 2° l'angle de projection α capable de porter le projectile à la distance X ,
- 3° la durée totale de trajet T .

§ 84. Portées — Si nous considérons la trajectoire définie par l'équation:

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V^2} + Kx \right); \quad (264)$$

la portée X est obtenue en y faisant $y = 0$, ce qui donne après suppression de la solution: $x = 0$, qui correspond à l'origine O :

$$\tan \alpha - \frac{gX}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V^2} + KX \right) = 0$$

ce qu'on peut écrire:

$$\sin 2\alpha = gX \left(\frac{1}{V^2} + KX \right) = \frac{gX}{V^2} + gKX^2 \quad (265)$$

Cette équation résolue par rapport à X donne la portée en fonction de l'angle de projection.

$$X = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 + 2KV^2 \frac{2V^2 \sin 2\alpha}{g}} - 1 \right). \quad (266)$$

On peut calculer X au moyen d'un angle auxiliaire ζ , tel que :

$$\tan^2 \zeta = 2KV^2 \frac{2V^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha; \quad (267)$$

car on obtient immédiatement :

$$X = \frac{1}{2KV^2} (\sec \zeta - 1) = \frac{1}{2KV^2} \left(\frac{1}{\cos \zeta} - 1 \right). \quad (268)$$

Dans le cas particulier où : $\alpha = 45^\circ$, on a : $2\alpha = 90^\circ$, et $\sin 2\alpha = 1$,

par suite :

$$X_{45} = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g}} - 1 \right) = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 + 0,40780 KV^4} - 1 \right), \quad (269)$$

Enfin dans le cas de l'angle de plus grande portée :

$$\alpha_m = 51^\circ 50'$$

on a :

$$\sin 2\alpha_m = 0,97169,$$

et en conséquence :

$$X_m = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 + \frac{3,88676 KV^4}{g}} - 1 \right) = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 + 0,59625 KV^4} - 1 \right) \quad (270)$$

§85. Angles de projection. — La question n'est pas aussi simple quand il s'agit de former une Table des angles de projection correspondant à une suite de portées suivant une loi quelconque ; par exemple en progression arithmétique, parce que K est une fonction de l'angle de projection α et que cette fonction est transcendante et non résoluble directement par rapport à α . On peut néanmoins résoudre pratiquement le problème et avec une exactitude suffisante. On part de la formule (266) dans laquelle on fait successivement : $\alpha = \{ 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ, 55^\circ, 60^\circ$, on calcule, à l'aide de cette formule, les valeurs correspondantes de X , après avoir déterminé les valeurs prises par K et données par la formule : $10^{10} K = 1,2922743 \cdot \Lambda \cdot A \cdot E \cdot \Psi$.

Puis on calcule, soit par interpolation, soit graphiquement, à l'aide de ces résultats, les valeurs de K qui correspondent aux portées X données d'avance, K étant ainsi déterminé, on résout l'équation (265) et on en déduit chaque valeur de l'angle de projection α .

Dans mon Traité de Balistique graphique, j'ai représenté la formule (265) par un abaque permettant de déterminer aussi bien l'angle de projection α que la portée X .

§86. De la quantité auxiliaire S . — Pour le calcul des autres éléments du tir, nous aurons recours à la quantité auxiliaire.

$$S = KV^2 X,$$

Dans mon Traité de Balistique graphique, cette quantité S est représentée par un abaque.

§87. Portées totales de trajet. — Nous avons démontré la formule :

$$\frac{w^2}{p} = g \frac{dx}{ds}; \quad (271)$$

or :

$$p = - \frac{ds^3}{dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}, \quad (272) \quad \text{et} \quad w = \frac{ds}{dt}; \quad (273)$$

ce qui donne :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \frac{dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3} = -g \frac{dx}{ds}, \quad (274)$$

ou en simplifiant :

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) = -g. \quad (275) \quad \text{Or:} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dx}{dt}$$

en remplaçant, il vient :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -g \quad (276)$$

d'où :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{g}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2} \quad (277)$$

Or, si nous différencions l'équation de la trajectoire (264), nous obtenons:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{V^2 \cos^3 \alpha} - \frac{3gKx}{\cos^3 \alpha} = -\frac{g}{V^2 \cos^3 \alpha} (1 + 3KV^2 x); \quad (278)$$

églons les valeurs (277) et (278) de $\frac{d^2y}{dx^2}$, nous obtenons:

$$V^2 \cos^3 \alpha \, dt^2 = (1 - 3KV^2 x) \, dx^2, \quad \text{ou} \quad V \cos \alpha \, dt = \sqrt{1 + 3KV^2 x} \cdot dx, \quad (279)$$

et en intégrant:

$$V \cos \alpha \cdot t = \int \sqrt{1 + 3KV^2 x} \, dx = \frac{2}{9KV^2} \left[(1 + 3KV^2 x)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]. \quad (280)$$

Lorsque $x = X$, on a: $t = T$, de sorte qu'on peut écrire:

$$T = \frac{2}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{3V} \cdot \frac{1}{3KV^2} \left[(1 + 3KV^2 X)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \frac{2}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{3V} \cdot \frac{1}{3KV^2} \left[(1 + 3S)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]. \quad (281)$$

Cette dernière formule peut encore s'écrire:

$$T = \frac{X}{V \cos \alpha} \cdot \frac{2}{9KV^2 X} \left[(1 + 3KV^2 X)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \frac{X}{V \cos \alpha} \cdot \frac{2}{9S} \left[(1 + 3S)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]. \quad (282)$$

Poseons:

$$\frac{2}{9S} \left[(1 + 3S)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \xi, \quad (283) \quad \text{la formule (282) peut s'écrire:} \quad T = \frac{X}{V \cos \alpha} \xi \quad (284)$$

Or la relation:

$$\frac{V^2 \sin 2\alpha}{gX} = 1 + KV^2 X = 1 + S \quad \text{peut aussi s'écrire:} \quad \frac{V^2 \cos^2 \alpha}{X^2} = \frac{g}{2} \cdot \frac{1 + S}{X \tan \alpha} \quad (285)$$

$$\text{d'où:} \quad \frac{V \cos \alpha}{X} = \sqrt{\frac{g}{2} \cdot \frac{1 + S}{X \tan \alpha}} \quad (286)$$

Poseons encore:

$$\Phi = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1 + S}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + S}} \cdot \frac{2}{9S} \left[(1 + 3S)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + S}} \cdot \xi, \quad (287)$$

il vient:

$$T = \frac{X}{V \cos \alpha} \cdot \xi = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{X \tan \alpha}{\sqrt{1 + S}} \cdot \xi = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + S}} \cdot \xi \sqrt{X \tan \alpha}, \quad (288)$$

et finalement:

$$T = \Phi \sqrt{X \tan \alpha}. \quad (289)$$

Φ est une fonction croissante de S qui prend la valeur $\sqrt{\frac{2}{g}}$ pour $S = 0$, de telle sorte qu'on a:

$$(T)_{S=0} = T_0 = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{X \tan \alpha} = \sqrt{\frac{2X \tan \alpha}{g}}, \quad (290)$$

qui est la valeur de la durée totale de trajet dans le cas du vide.

Pour $S = \infty$, on obtient la plus grande valeur que puisse prendre Φ , soit: $\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3g}}$, de telle sorte que:

$$(T)_{S=\infty} = T_{\infty} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{X \tan \alpha} = \sqrt{\frac{8X \tan \alpha}{3g}}, \quad (291)$$

les valeurs limites de Φ sont:

$$\Phi_0 = 0,4516 \quad \text{et} \quad \Phi_{\infty} = 0,5214$$

Pour faciliter les calculs, nous avons calculé une Table des valeurs de Φ que nous donnerons plus loin en supposant:

$$g = 9^m,8088.$$

Pour obtenir les nombres qui correspondent à une accélération g' , il suffit de multiplier les nombres de cette Table par:

$$\sqrt{\frac{g}{g'}} = \sqrt{\frac{9,8088}{g'}} = \frac{3,13}{\sqrt{g'}}. \quad (292)$$

La fonction (289) a été représentée par un abaque dans mon Traité de Balistique graphique.

Dans le cas particulier pour lequel: $\alpha = 45^\circ$, on a $\tan \alpha = 1$, et la formule (289) se simplifie et devient:

$$T_{45} = \Phi \sqrt{X_{45}}. \quad (293)$$

Dans le cas de l'angle de plus grande portée:

$$\alpha_m = 51^\circ 50',$$

on a:

$$\tan \alpha_m = 1,27230,$$

et la formule (289) donne:

$$T_m = \Phi \sqrt{1,27230 X_m} = 1,128 \Phi \sqrt{X_m}. \quad (294)$$

§88. Application — Si nous appliquons la formule (294) au canon 360 160 045, en supposant que le tir s'exécute au lieu X pour lequel: $\varphi = 49^\circ$ et $z = 200^m$ sachant que la portée maximum: $X_m = 87\,837^m$ nous trouvons: $KV^2X = 0,000\,000\,000\,008\,391\,7 \times 2\,560\,000 \times 87\,837 = 1,887$ par suite: $\Phi = 0,506\,6$ et $T_m = 1,128 \times 0,506\,6 \times \sqrt{87\,837} = 169^s,4$

Chapitre XVI

Calcul des éléments accessoires du tir.

§89. Éléments accessoires. — Les éléments accessoires du tir qui nous intéressent sont: l'angle de chute: ω ,

les vitesses restantes au point de chute: $\begin{cases} \text{tangentielle: } v, \\ \text{horizontale: } v', \\ \text{verticale: } v'' \end{cases}$

et l'énergie cinétique E du projectile au point de chute.

§90. Angle de chute — Différentions l'équation (264) de la trajectoire, nous trouvons:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{V^2 \cos^2 \alpha} - \frac{3gKx^2}{2 \cos^2 \alpha} \quad (295)$$

le long de la branche ascendante, on a: $\frac{dy}{dx} > 0$, et le long de la branche descendante, on a: $\frac{dy}{dx} < 0$.

Pour $x=0$, c'est-à-dire à l'origine, on a évidemment: $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \alpha$.

Pour la portée X , l'angle ψ devient le supplément de l'angle de chute, et comme il est convenu de ne considérer que la valeur absolue, on obtient:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{gX}{V^2 \cos^2 \alpha} + \frac{3gKX^2}{2 \cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \quad (296)$$

ce qui donne:

$$\frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{gX}{V^2 \sin^2 \alpha} (2 + 3KV^2X) - 1 = \frac{1}{1 + KV^2X} (2 + 3KV^2X) - 1$$

ou

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \alpha \left(1 + \frac{KV^2X}{1 + KV^2X} \right) = \operatorname{tg} \alpha \left(1 + \frac{S}{1+S} \right) \quad (297)$$

La fonction:

$$\Omega = 1 + \frac{S}{1+S} = \frac{1+2S}{1+S} \quad (298)$$

varie de 1 à 2 quand S varie de 0 à l' ∞ . Nous donnons plus loin une Table des valeurs de cette fonction Ω .

Dans mon Traité de Balistique graphique, cette fonction Ω est représentée par un abaque.

Si: $\alpha = 45^\circ$, on a: $\operatorname{tg} \alpha = 1$, et il vient:

$$\operatorname{tg} \omega_{45} = \Omega = 1 + \frac{KV^2X_{45}}{1 + KV^2X_{45}} = 1 + \frac{S}{1+S} \quad (299)$$

Quand l'angle de projection est celui de portée maximum: $\alpha_m = 51^\circ 50'$, on a: $\operatorname{tg} \alpha_m = 1,272\,30$

et par suite:

$$\operatorname{tg} \omega_m = 1,272\,30 \, \Omega = 1,272\,30 \left(1 + \frac{KV^2X_m}{1 + KV^2X_m} \right) \quad (300)$$

§91. Application

Si nous appliquons la formule (300) au canon 360 160 045, en supposant que le tir s'exécute au lieu X pour lequel: $\varphi = 49^\circ$ et $z = 200^m$ sachant que la portée maximum:

nous savons que: $KV^2X = S = 1,887$,

alors $X_m = 87\,837^m$

$$\Omega = 1,654\,6$$

il en résulte:

$$\operatorname{tg} \omega_m = 1,272\,30 \times 1,654\,6 = 2,105\,15$$

et:

$$\omega_m = 64^\circ 35'$$

§ 92. Vitesse restante au point de chute — Reprenons l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \quad (301)$$

Au point de chute, nous avons :

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \omega,$$

or, d'après la relation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-g}{V^2 \cos^2 \alpha} (1 + 3KV^2 X) = \frac{-g}{V^2 \cos^2 \alpha} (1 + 3S),$$

donc :

$$\frac{g}{V^2 \cos^2 \alpha} (1 - 3S) = \frac{g}{V^2 \cos^2 \omega} \quad (302)$$

ce qui donne :

$$v \cos \omega = \frac{V \cos \alpha}{\sqrt{1 + 3S}} \quad (303)$$

D'après cela, on déduit :

pour la vitesse finale tangentielle :

$$v = V \frac{\cos \alpha}{\cos \omega} \times \frac{1}{\sqrt{1 + 3S}}, \quad (304)$$

pour la vitesse finale horizontale :

$$v' = v \cos \omega = V \cos \alpha \times \frac{1}{\sqrt{1 + 3S}}, \quad (305)$$

et pour la vitesse finale verticale :

$$v'' = v \sin \omega = V \cos \alpha \operatorname{tg} \omega \times \frac{1}{\sqrt{1 + 3S}} \quad (306)$$

La fonction :

$$Y = \frac{1}{\sqrt{1 + 3S}} \quad (307)$$

varie de 1 à 0 quand S varie de 0 à l'infini.

Nous donnons plus loin une Table des valeurs de la fonction Y. Dans mon Traité de Balistique graphique, un abaque permet d'obtenir rapidement v, v' et v''.

Pour $\alpha = 45^\circ$, on a : $\operatorname{tg} \omega_{45} = \Omega$ par suite :

$$\sin \omega_{45} = \frac{\Omega}{\sqrt{1 + \Omega^2}}, \quad \text{et} \quad \cos \omega_{45} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}},$$

il en résulte :

$$\operatorname{tg} \omega_{45} = \frac{1 + 2S}{1 + S};$$

par suite :

$$\sin \omega_{45} = \frac{1 + 2S}{\sqrt{(1 + 2S)^2 + (1 + S)^2}} = \frac{1 + 2S}{\sqrt{2 + 6S + 5S^2}}, \quad \text{et} \quad \cos \omega_{45} = \frac{1 + S}{\sqrt{(1 + 2S)^2 + (1 + S)^2}} = \frac{1 + S}{\sqrt{2 + 6S + 5S^2}}.$$

En conséquence :

$$v_{45} = \frac{0,70711 V \sqrt{2 + 6S + 5S^2}}{1 + S} \times \frac{1}{\sqrt{1 + 3S}}, \quad (308)$$

$$v'_{45} = 0,70711 V \frac{1}{\sqrt{1 + 3S}}, \quad (309)$$

$$\text{et} : v''_{45} = \frac{0,70711 V (1 + 2S)}{1 + S} \times \frac{1}{\sqrt{1 + 3S}} \quad (310)$$

Dans le cas de l'angle de projection de portée maximum :

$$\alpha_m = 51^\circ 50',$$

on a : $\operatorname{tg} \alpha_m = 1,27230$

$$\cos \alpha_m = 0,61795,$$

$$\sin \alpha_m = 0,78622.$$

et alors :

$$\operatorname{tg} \omega_m = 1,27230 \frac{1 + 2S}{1 + S},$$

par suite :

$$\sin \omega_m = \frac{1,27230 \frac{1 + 2S}{1 + S}}{\sqrt{1 + 1,27230^2 \left(\frac{1 + 2S}{1 + S}\right)^2}} = \frac{1,27230 (1 + 2S)}{\sqrt{1,61875 (1 + 2S)^2 + (1 + S)^2}}, \quad \text{et} \quad \cos \omega_m = \frac{1}{\sqrt{1 + 1,27230^2 \left(\frac{1 + 2S}{1 + S}\right)^2}} = \frac{1 + S}{\sqrt{1,61875 (1 + 2S)^2 + (1 + S)^2}}.$$

On en déduit pour ce cas spécial :

$$v_m = 0,61795 V \times \frac{\sqrt{1,61875 (1 + 2S)^2 + (1 + S)^2}}{1 + S} \times \frac{1}{\sqrt{1 + 3S}}, \quad (311)$$

$$v'_m = 0,61795 V \times \frac{1}{\sqrt{1 + 3S}}, \quad (312)$$

et

$$v''_m = 0,61795 V \times \frac{1 + 2S}{1 + S} \times \frac{1}{\sqrt{1 + 3S}} \quad (313)$$

§ 93. Application — Si nous appliquons les formules (311), (312) et (313) au canon 360 160 045, en

supposant que le tir s'exécute au lieu X pour lequel :

$$\varphi = 49^\circ,$$

$$\text{et} \quad x = 200^m,$$

sachant que la portée maximum est :

$$X_m = 87837^m,$$

nous savons que :

$$KV^2 X = S = 1,887,$$

d'où :

$$Y = 0,3867;$$

et comme : $\lg \omega_m = 2,10545$, nous en déduisons : $\cos \omega_m = 0,42909$, et $\sin \omega_m = 0,90330$

De plus : $V = 1600^m$, on a donc finalement :

$$V_m = 1600 \times \frac{0,61795}{0,42909} \times 0,3867 = 891^m,$$

$$V'_m = 891 \times 0,42909 = 382^m,$$

$$V''_m = 891 \times 0,90330 = 805^m.$$

§ 94. Énergie cinétique du projectile au point de chute. — Soit E l'énergie cinétique du projectile au point de chute ; on a :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p}{2g} v^2, \quad (314)$$

et en remplaçant v par sa valeur précédemment trouvée :

$$v = V \times \frac{\cos \alpha}{\cos \omega} \times \frac{1}{\sqrt{1+3S}},$$

il vient :

$$E = \frac{p}{2g} V^2 \times \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \omega} \times \frac{1}{1+3S}. \quad (315)$$

Désignons maintenant par :

E' l'énergie cinétique correspondant à la vitesse finale horizontale v' ,

E'' l'énergie cinétique correspondant à la vitesse finale verticale v'' .

les dites énergies cinétiques E' et E'' sont telles qu'elles satisfont à la relation :

$$E'^2 + E''^2 = E^2.$$

E' et E'' sont données par les formules :

$$E' = \frac{p}{2g} V^2 \cos^2 \alpha \frac{1}{1+3S}, \quad (316)$$

$$E'' = \frac{p}{2g} V^2 \cos^2 \alpha \lg^2 \omega \frac{1}{1+3S}. \quad (317)$$

Si $\alpha = 45^\circ$, on a :

$$E_{45} = \frac{p}{2g} V^2 \times \frac{0,5(2+6S+5S^2)}{(1+S)^2} \times \frac{1}{1+3S} = 0,25 \frac{p}{g} V^2 \times \frac{2+6S+5S^2}{(1+S)^2(1+3S)}, \quad (318)$$

puis :

$$E'_{45} = 0,25 \frac{p}{g} V^2 \times \frac{1}{1+3S}, \quad (319) \quad \text{et} \quad E''_{45} = 0,25 \frac{p}{g} V^2 \times \frac{(1+S)^2}{(1+S)^2(1+3S)}. \quad (320)$$

Lorsque l'angle de projection est l'angle de portée maximum :

$$\alpha_m = 51^\circ 50',$$

on a les formules suivantes :

$$E_m = 0,19093 \frac{p}{g} V^2 \times \frac{1,61875(1+2S)^2 + (1+S)^2}{(1+S)^2(1+3S)}, \quad (321)$$

puis :

$$E'_m = 0,19093 \frac{p}{g} V^2 \times \frac{1}{1+3S}, \quad (322) \quad \text{et} \quad E''_m = 0,19093 \frac{p}{g} V^2 \times \frac{(1+2S)^2}{(1+S)^2(1+3S)}. \quad (323)$$

§ 95. Application. — Si nous appliquons les formules (321), (322) et (323) au canon

360 160 045, en supposant que le tir s'exécute au lieu X pour lequel : $\varphi = 49^\circ$, et $z = 200^m$,

sachant que la portée maximum : $X_m = 87837^m$

et que : $p = 450^{kg}$, par suite :

$$\frac{p}{g} = 45,8772 \quad \text{et} \quad \frac{p}{2g} = 22,9386,$$

Or nous avons trouvé :

$$v = 891^m$$

$$v' = 382^m$$

$$\text{et} \quad v'' = 805^m$$

il en résulte :

$$E = 22,9386 \times 891^2 = 22,9386 \times 793881, \quad \text{donc :} \quad E = 18^{kgm}, 211,$$

$$E'_m = 22,9386 \times 382^2 = 22,9386 \times 145924, \quad E'_m = 3,347,$$

$$E''_m = 22,9386 \times 805^2 = 22,9386 \times 648025, \quad E''_m = 14,848$$

Chapitre XVII.

Calcul des éléments complémentaires du tir.

§ 96. Éléments complémentaires. — Parmi les éléments complémentaires du tir que nous avons signalés au § 83, nous ne considérerons ici que la flèche de la trajectoire y_s , dont la connaissance nous est très utile.

§ 97. Flèches. — Reprenons l'équation de la trajectoire:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V^2} + Kx \right), \quad (324)$$

nous obtiendrons l'abscisse X_s du sommet de cette trajectoire en résolvant l'équation dérivée par rapport à x et égale à zéro:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{2gx}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V^2} + Kx \right) - \frac{Kgx^2}{2 \cos^2 \alpha} = 0, \quad (325)$$

ce qui donne en simplifiant:

$$3KV^2 X_s^2 + 2X_s = \frac{V^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (326)$$

Or la portée X est donnée par la relation:

$$KV^2 X^2 + X = \frac{V^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (327)$$

La comparaison des égalités (326) et (327) conduit immédiatement à la suivante:

$$3KV^2 X_s^2 + 2X_s - (KV^2 X^2 + X) = 0 \quad (328)$$

qui résolue par rapport à X_s donne:

$$X_s = \frac{-1 + \sqrt{1 + 3K^2 V^4 X^2 + 3KV^2 X}}{3KV^2}, \quad \text{ou:} \quad X_s = \frac{-1 + \sqrt{1 + 3S^2 + 3S}}{3KV^2} \quad (329)$$

Quand $K = 0$, la formule (329) se simplifie et devient:

$$2X_s - X = 0, \quad \text{d'où:} \quad X_s = \frac{X}{2}, \quad (330)$$

c'est le cas du vide. Pour $K = \infty$, la formule (329) se réduit à:

$$3V^2 X_s^2 - V^2 X = 0, \quad (331)$$

ce qui donne:

$$X_s = \frac{X}{\sqrt{3}}.$$

Le rapport $\frac{X_s}{X}$ varie donc de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire de 0,5 à 0,5773, quand K varie de zéro à l'infini.

Le maniement de la formule (329) n'est pas commode; aussi lui substitue-t-on une autre formule obtenue en remarquant que, à cause de la petitesse du paramètre K , le rapport $\frac{X_s}{X}$ s'élève peu au-dessus de la formule $\frac{1}{2}$. Posons alors:

$$\frac{X_s}{X} = \frac{1}{2} + n, \quad (332)$$

n varie de zéro à 0,0773 et son carré est négligeable. Remplaçons donc X_s par $X(\frac{1}{2} + n)$ dans la formule (328), nous obtenons:

$$3KV^2 X^2 \left(\frac{1}{2} + n \right) + 2X \left(\frac{1}{2} + n \right) - KV^2 X^2 - X = 0, \quad (333)$$

puis:

$$3nKV^2 X^2 + 3n^2 KV^2 X^2 + 2nX - \frac{1}{4} KV^2 X^2 = 0. \quad (334)$$

Si nous négligeons le terme en n^2 , nous obtenons:

$$n(3KV^2 X^2 + 2X) = \frac{1}{4} KV^2 X^2 \quad (335)$$

ce qui donne:

$$n = \frac{1}{4} \cdot \frac{KV^2 X}{2 + 3KV^2 X} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S}{2 + 3S}. \quad (336)$$

Pour $K = 0$, on a:

$$\left(\frac{X_s}{X} \right)_0 = \frac{1}{2} = 0,5, \quad \text{c'est le cas du vide.}$$

Pour $K = \infty$, on trouve

$$\left(\frac{X_s}{X} \right)_\infty = \frac{1}{2} + 0,0833 = 0,5000 + 0,0833 = 0,5833.$$

X_s étant ainsi déterminé, y_s est donné par la relation:

$$y_s = X_s \operatorname{tg} \alpha - \frac{g X_s}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V^2} + K X_s \right) \quad (337)$$

qui donne immédiatement:

$$\frac{y_s}{X_s \operatorname{tg} \alpha} = 1 - \frac{g X_s}{2 V^2 \sin \alpha \cos \alpha} \left(1 + K V^2 X_s \right)$$

ou :

$$\frac{y_s}{X_s \operatorname{tg} \alpha} = 1 - \frac{g X_s}{V^2 \sin 2\alpha} (1 + KV^2 X_s). \quad (338)$$

Or, d'après la relation (326) :

$$\frac{g X_s}{V^2 \sin 2\alpha} = \frac{1}{2 + 3KV^2 X_s},$$

donc :

$$\frac{y_s}{X_s \operatorname{tg} \alpha} = 1 - \frac{1 + KV^2 X_s}{2 + 3KV^2 X_s} = \frac{1 + 2KV^2 X_s}{2 + 3KV^2 X_s}. \quad (339)$$

Posons :

$$\frac{X_s}{X} = \lambda = \frac{1}{2} + n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{S}{2 + 3S}, \quad (340)$$

il vient :

$$\frac{y_s}{X_s \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + 2\lambda S}{2 + 3\lambda S} = \frac{14S^2 + 20S + 8}{21S^2 + 36S + 16} = \mu, \quad (341)$$

donc :

$$X_s = \lambda X,$$

et :

$$y_s = \mu X_s \operatorname{tg} \alpha = \lambda \mu X \operatorname{tg} \alpha. \quad (342)$$

ce qui donne en remplaçant λ et μ par leurs valeurs respectives, et en effectuant :

$$y_s = X \operatorname{tg} \alpha \frac{49S^3 + 98S^2 + 68S + 16}{126S^3 + 300S^2 + 240S + 64}. \quad (343)$$

Pour $K=0$, qui est le cas du vide, on a :

$$\frac{y_s}{X \operatorname{tg} \alpha} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} = 0,2500$$

et pour $K=\infty$, on a :

$$\frac{y_s}{X \operatorname{tg} \alpha} = \frac{49}{126} = \frac{7}{18} = 0,3889$$

Nous donnons plus loin une Table des valeurs de la fonction Σ :

$$\Sigma = \frac{49S^3 + 98S^2 + 68S + 16}{126S^3 + 300S^2 + 240S + 64}. \quad (344)$$

Cette fonction est représentée par un abaque dans mon Traité de Balistique graphique.

Si $\alpha = 45^\circ$, on a simplement :

$$(y_s)_{45} = \Sigma X_{45} \quad (345)$$

Dans le cas de l'angle de plus grande portée :

$$\alpha_m = 51^\circ 50', \quad \text{on a : } \operatorname{tg} \alpha_m = 1,27230$$

et par suite :

$$(y_s)_m = 1,27230 \Sigma X_m. \quad (346)$$

§ 98. Application — Si nous appliquons la formule (346) au canon 360 160 045, en supposant

que le tir s'exécute au lieu X , pour lequel :

$$\varphi = 49^\circ, \quad \text{et } z = 200^m$$

sachant que la portée maximum est :

$$X_m = 87837^m$$

nous savons que :

$$KV^2 X = S = 1,887, \quad \text{alors :}$$

$$\Sigma = 0,3383$$

il en résulte :

$$y_s = 1,27230 \times 0,3383 \times 87837$$

$$\text{ou : } y_s = 37807^m$$

Chapitre XVIII

Récapitulation

§ 99. Formules balistiques dans le cas général — Il résulte de tout ce qui précède que, dans le cas général, on peut adopter les formules suivantes :

I — 1°) Pour la portée :

$$X = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4KV^2 \sin 2\alpha}{g}} - 1 \right), \quad (347)$$

2°) Pour la durée totale de trajet :

$$T = \Phi \sqrt{X \operatorname{tg} \alpha} \quad (348)$$

II — 3°) Pour l'angle de chute :

$$\operatorname{tg} \omega = \Omega \operatorname{tg} \alpha \quad (349)$$

4°) Pour la vitesse finale tangentielle:

$$v = V \cdot Y \times \frac{\cos \alpha}{\cos \omega}, \quad (350)$$

5°) Pour la vitesse finale horizontale:

$$v' = V \cdot Y \cos \alpha, \quad (351)$$

6°) Pour la vitesse finale verticale:

$$v'' = V \cdot Y \cos \alpha \operatorname{tg} \omega, \quad (352)$$

7°) Pour l'énergie cinétique tangentielle du projectile au point de chute:

$$E = 0,5 \frac{p}{g} V^2 Y^2 \times \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \omega}, \quad (353)$$

8°) Pour l'énergie cinétique horizontale du projectile au point de chute:

$$E' = 0,5 \frac{p}{g} V^2 Y^2 \cos^2 \alpha, \quad (354)$$

9°) Pour l'énergie cinétique verticale du projectile au point de chute:

$$E'' = 0,5 \frac{p}{g} V^2 Y^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \omega, \quad (355)$$

III — 10°) Pour la flèche de la trajectoire:

$$y_s = X \cdot \Sigma \operatorname{tg} \alpha. \quad (356)$$

§ 100. Formules balistiques dans le cas de $\alpha = 45^\circ$ — Les formules du § 99 deviennent lorsque l'angle de projection $\alpha = 45^\circ$:

$$1^\circ) \quad X_{45} = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 + 0,40780 KV^4} - 1 \right), \quad (357)$$

$$2^\circ) \quad T_{45} = \Phi \sqrt{X_{45}}, \quad (358) \quad 3^\circ) \quad \operatorname{tg} \omega_{45} = \Omega, \quad (359)$$

$$4^\circ) \quad v_{45} = V \cdot Y \times \frac{0,70711}{\cos \omega_{45}}, \quad (360)$$

$$5^\circ) \quad v'_{45} = V \cdot Y \times 0,70711, \quad (361) \quad 6^\circ) \quad v''_{45} = V \cdot Y \times 0,70711 \times \operatorname{tg} \omega_{45}, \quad (362)$$

$$7^\circ) \quad E_{45} = 0,25 \frac{p}{g} V^2 Y^2 \times \frac{1}{\cos^2 \omega_{45}}, \quad (363)$$

$$8^\circ) \quad E'_{45} = 0,25 \frac{p}{g} V^2 Y^2, \quad (364) \quad 9^\circ) \quad E''_{45} = 0,25 \frac{p}{g} V^2 Y^2 \operatorname{tg}^2 \omega_{45}, \quad (365)$$

$$10^\circ) \quad [y_s]_{45} = X_{45} \cdot \Sigma. \quad (366)$$

§ 101. Formules balistiques dans le cas de l'angle de projection de plus grande portée — Dans le cas de l'angle de projection de plus grande portée:

$$\alpha_m = 51^\circ 50',$$

les formules du § 99 deviennent:

$$1^\circ) \quad X_m = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 + 0,39625 KV^4} - 1 \right), \quad (367)$$

$$2^\circ) \quad T_m = 1,128 \Phi \sqrt{X_m}, \quad (368) \quad 3^\circ) \quad \operatorname{tg} \omega_m = 1,27230 \Omega, \quad (369)$$

$$4^\circ) \quad v_m = V \cdot Y \times \frac{0,61795}{\cos \omega_m}, \quad (370)$$

$$5^\circ) \quad v'_m = V \cdot Y \times 0,61795, \quad (371) \quad 6^\circ) \quad v''_m = V \cdot Y \times 0,61795 \times \operatorname{tg} \omega_m, \quad (372)$$

$$7^\circ) \quad E_m = 0,19093 \frac{p}{g} V^2 Y^2 \times \frac{1}{\cos^2 \omega_m}, \quad (373)$$

$$8^\circ) \quad E'_m = 0,19093 \frac{p}{g} V^2 Y^2, \quad (374) \quad 9^\circ) \quad E''_m = 0,19093 \frac{p}{g} V^2 Y^2 \operatorname{tg}^2 \omega_m, \quad (375)$$

$$10^\circ) \quad [y_s]_m = 1,27230 X_m \cdot \Sigma. \quad (376)$$

§ 102. Table des valeurs des fonctions balistiques Φ , Ω , Υ et Σ — Pour terminer cette importante question, nous donnons une Table des différentes valeurs des fonctions balistiques que nous avons trouvées en calculant les formules devant servir à la détermination des divers éléments du tir

$KVX=S$	$\Phi = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+S}}$	Différences	$\Omega = \frac{1+S}{1+S}$	Différences	$\Upsilon = \frac{1}{\sqrt{1+S}}$	Différences	$\Sigma = \frac{49S^3+98S^2+68S+16}{126S^3+300S^2+240S+64}$	Différences	$KVX=S$	$\Phi = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+S}}$	Différences	$\Omega = \frac{1+S}{1+S}$	Différences	$\Upsilon = \frac{1}{\sqrt{1+S}}$	Différences	$\Sigma = \frac{49S^3+98S^2+68S+16}{126S^3+300S^2+240S+64}$	Différences
0,00	0,4516		1,0000		1,0000		0,2500		1,40	0,5024	6	1,5853	88	0,4385	65	0,3282	13
0,05	0,4565	49	1,0476	476	0,9325	675	0,2560	60	1,45	0,5030	6	1,5918	85	0,4323	62	0,3294	12
0,10	0,4611	46	1,0909	433	0,8771	554	0,2615	55	1,50	0,5035	5	1,6000	82	0,4264	59	0,3306	12
0,15	0,4655	44	1,1304	395	0,8305	466	0,2666	51	1,55	0,5040	5	1,6078	78	0,4207	57	0,3317	11
0,20	0,4690	35	1,1667	363	0,7906	399	0,2713	47	1,60	0,5044	4	1,6154	76	0,4153	54	0,3327	10
0,25	0,4721	31	1,2000	333	0,7559	347	0,2756	43	1,65	0,5048	4	1,6226	72	0,4100	53	0,3338	11
0,30	0,4749	28	1,2308	308	0,7255	304	0,2797	41	1,70	0,5052	4	1,6296	70	0,4049	51	0,3348	10
0,35	0,4774	25	1,2593	285	0,6984	271	0,2835	38	1,75	0,5055	3	1,6364	68	0,4000	49	0,3357	9
0,40	0,4798	24	1,2857	264	0,6742	242	0,2871	36	1,80	0,5059	4	1,6429	65	0,3953	47	0,3367	10
0,45	0,4819	21	1,3103	246	0,6523	219	0,2904	33	1,85	0,5063	4	1,6491	62	0,3907	46	0,3376	9
0,50	0,4839	20	1,3333	230	0,6325	198	0,2934	30	1,90	0,5067	4	1,6552	61	0,3863	44	0,3385	9
0,55	0,4856	17	1,3548	215	0,6143	182	0,2962	28	1,95	0,5071	4	1,6610	58	0,3821	42	0,3392	7
0,60	0,4872	16	1,3750	202	0,5976	167	0,2989	27	2,00	0,5074	3	1,6667	57	0,3780	41	0,3401	9
0,65	0,4887	15	1,3939	189	0,5822	154	0,3017	28			14		208		153		30
0,70	0,4901	14	1,4118	179	0,5680	142	0,3042	25	2,20	0,5088		1,6875		0,3627		0,3431	
0,75	0,4914	13	1,4286	168	0,5547	133	0,3065	23	2,40	0,5097	9	1,7059	184	0,3492	135	0,3458	27
0,80	0,4926	12	1,4444	158	0,5423	124	0,3087	22	2,60	0,5106	9	1,7222	163	0,3371	121	0,3481	23
0,85	0,4937	11	1,4595	151	0,5307	116	0,3108	21	2,80	0,5114	8	1,7368	146	0,3262	109	0,3502	21
0,90	0,4948	11	1,4737	142	0,5199	108	0,3128	20	3,00	0,5121	7	1,7500	132	0,3162	100	0,3521	19
0,95	0,4958	10	1,4872	135	0,5096	103	0,3147	21			15		278		213		41
1,00	0,4967	9	1,5000	128	0,5000	96	0,3165	18	3,50	0,5136		1,7778		0,2949		0,3562	
1,05	0,4975	8	1,5122	122	0,4909	91	0,3182	17	4,00	0,5145	9	1,8000	222	0,2774	175	0,3595	33
1,10	0,4983	8	1,5238	116	0,4822	87	0,3197	15	4,50	0,5155	10	1,8182	182	0,2626	148	0,3621	26
1,15	0,4991	8	1,5349	111	0,4740	82	0,3213	16	5,00	0,5162	7	1,8333	151	0,2500	126	0,3643	22
1,20	0,4999	8	1,5455	106	0,4662	78	0,3228	15			30		758		704		111
1,25	0,5006	7	1,5556	101	0,4588	74	0,3242	14	10,00	0,5192		1,9091		0,1796		0,3754	
1,30	0,5012	6	1,5652	96	0,4517	71	0,3256	14									
1,35	0,5018	6	1,5745	93	0,4450	67	0,3269	13	∞	0,5214		2,0000		0,0000		0,3889	

Fin de la Première Partie.

Deuxième Partie.

Problèmes balistiques secondaires.

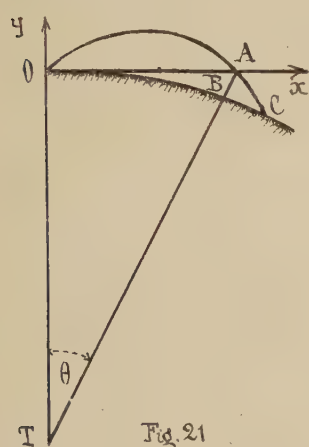
Chapitre III.

Des corrections à apporter provenant de la courbure et de la rotation de la Terre.

§ 103. Preliminaires — Dans la résolution du problème balistique principal nous avons supposé que le mouvement du projectile assimilé à un point pesant se faisait dans un milieu en repos, de densité variable, lui opposant une résistance tangentielle, fonction de la vitesse, la Terre étant supposée plane et immobile, la gravité étant constante en grandeur et en direction.

Nous nous proposons maintenant d'étudier les diverses corrections qu'il faut apporter aux résultats précédemment obtenus quand on tient compte de la sphéricité et de la rotation de la Terre, de la variation de la gravité, de l'agitation de l'atmosphère et du phénomène de la dérivation provoqué par le projectile qui en réalité n'est pas un point matériel.

§ 104. Influence de la courbure de la Terre — Soient T le centre de la Terre (fig. 21), O l'origine de la trajectoire, Ox la trace du plan tangent à la sphère terrestre de rayon R sur le plan vertical de tir. Considérons un rayon TB faisant un angle θ avec le rayon TO, nous avons tout d'



abord :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{OA}{OT} = \frac{OA}{R} ;$$

Proposons-nous de calculer la distance AB :

$$AB = TA - R ,$$

mais :

$$TA = \frac{R}{\cos \theta} , \quad (377)$$

donc :

$$AB = \frac{R}{\cos \theta} - R = R \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) = R \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} . \quad (378)$$

De plus :

$$OA = R \operatorname{tg} \theta .$$

Supposons : $\theta = 1^\circ$, alors : $\operatorname{tg} \theta = 0,0174551$ et $\cos \theta = 0,9998477$,

par suite

$$\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} = 0,0001523232$$

Si nous adoptons pour le rayon moyen de la Terre : $R = 6371000^m$,

nous trouvons : $AB = 970^m$ et $OA = 111206^m$.

Donc, pour une portée de 111 kilomètres la différence d'altitude AB est voisine de 1 kilomètre, ce qui n'est pas négligeable. Le calcul préliminaire indique que nous devons tenir compte de la courbure de la Terre, dans les tirs à très longues portées.

Nous pouvons dès maintenant avoir une idée de l'augmentation de portée provenant de la courbure de la Terre. Soit ω l'angle de chute au point A, la verticale en ce point fait avec la verticale au point de départ O, un angle θ (fig. 22), et cette tangente au point de chute détermine avec le rayon AT et la trace BD du plan tangent au point B au globe terrestre sur le plan de tir un triangle rectangle ABD, dans lequel,

$$BD = AB \operatorname{tg} BAD = AB \operatorname{tg} (90^\circ + \theta - \omega) = AB \operatorname{colog} (\omega - \theta) ,$$

et comme :

$$AB = R \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} ,$$

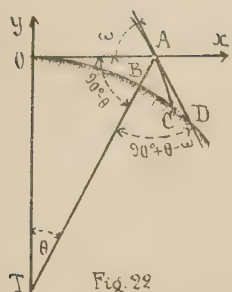


Fig. 22

il en résulte :

$$BD = \frac{R(1 - \cos \theta)}{\cos \theta} \cotg(\omega - \theta) \quad (379)$$

Ceci dit, supposons :

$$\theta = 1^\circ,$$

et

$$\omega = 55^\circ,$$

il vient :

$$BD = 970 \times \cotg(55^\circ - 1^\circ) = 970 \cotg 54^\circ = 705^m$$

Le calcul montre que la correction sur la portée ne dépassera pas 700 mètres et que dans les tirs à très longues portées il ne faut pas négliger la courbure de la Terre, l'augmentation de portée pouvant parfois atteindre et même dépasser 1 kilomètre.

§ 105. Table des corrections à faire sur les portées provenant de la courbure de la Terre. — La correction à faire sur une portée déterminée peut sensiblement être exprimée par la valeur de la corde BD. La Table suivante donne les valeurs de BD pour les angles de chute ω égaux à $45^\circ, 50^\circ, 55^\circ, 60^\circ$ et 65° et pour des portées allant jusqu'à 360 kilomètres, l'argument étant 10^{km}

Portées	θ	Valeurs de AB	Valeurs de BD					Portées	θ	Valeurs de AB	Valeurs de BD				
			$\omega = 45^\circ$	$\omega = 50^\circ$	$\omega = 55^\circ$	$\omega = 60^\circ$	$\omega = 65^\circ$				$\omega = 45^\circ$	$\omega = 50^\circ$	$\omega = 55^\circ$	$\omega = 60^\circ$	$\omega = 65^\circ$
10^{km}	$0^\circ, 05' 23''$	8^m	8^m	7^m	6^m	5^m	4^m	200^{km}	$1^\circ, 48'$	$3^{km}, 1$	$3^{km}, 3$	$2^{km}, 8$	$2^{km}, 3$	$1^{km}, 9$	$1^{km}, 6$
20	$0^\circ, 10' 47''$	31	31	26	22	18	15	210	$1^\circ, 53'$	$3^{km}, 4$	$3^{km}, 6$	$3^{km}, 1$	$2^{km}, 6$	$2^{km}, 1$	$1^{km}, 7$
30	$0^\circ, 16' 11''$	71	72	60	50	41	33	220	$1^\circ, 59'$	$3^{km}, 8$	$4^{km}, 0$	$3^{km}, 4$	$2^{km}, 9$	$2^{km}, 4$	$1^{km}, 9$
40	$0^\circ, 21' 35''$	126	128	107	89	74	60	230	$2^\circ, 04'$	$4^{km}, 1$	$4^{km}, 4$	$3^{km}, 7$	$3^{km}, 1$	$2^{km}, 6$	$2^{km}, 1$
50	$0^\circ, 26' 58''$	196	199	167	140	115	93	240	$2^\circ, 09'$	$4^{km}, 5$	$4^{km}, 8$	$4^{km}, 0$	$3^{km}, 4$	$2^{km}, 8$	$2^{km}, 3$
60	$0^\circ, 32' 22''$	283	288	242	202	167	135	250	$2^\circ, 15'$	$4^{km}, 9$	$5^{km}, 3$	$4^{km}, 4$	$3^{km}, 7$	$3^{km}, 1$	$2^{km}, 5$
70	$0^\circ, 37' 46''$	385	394	330	276	228	185	260	$2^\circ, 20'$	$5^{km}, 3$	$5^{km}, 8$	$4^{km}, 8$	$4^{km}, 0$	$3^{km}, 3$	$2^{km}, 7$
80	$0^\circ, 43' 10''$	502	515	431	360	298	242	270	$2^\circ, 26'$	$5^{km}, 7$	$6^{km}, 2$	$5^{km}, 2$	$4^{km}, 4$	$3^{km}, 6$	$3^{km}, 0$
90	$0^\circ, 48' 33''$	636	654	549	459	379	307	280	$2^\circ, 31'$	$6^{km}, 1$	$6^{km}, 7$	$5^{km}, 6$	$4^{km}, 7$	$3^{km}, 9$	$3^{km}, 2$
100	$0^\circ, 53' 57''$	785	810	680	568	470	381	290	$2^\circ, 36'$	$6^{km}, 6$	$7^{km}, 2$	$6^{km}, 1$	$5^{km}, 1$	$4^{km}, 2$	$3^{km}, 5$
110	$0^\circ, 59' 21''$	950	984	826	690	570	463	300	$2^\circ, 42'$	$7^{km}, 1$	$7^{km}, 8$	$6^{km}, 6$	$5^{km}, 5$	$4^{km}, 5$	$3^{km}, 7$
120	$1^\circ, 04' 44''$	1130	1173	985	823	681	553	310	$2^\circ, 47'$	$7^{km}, 5$	$8^{km}, 3$	$7^{km}, 0$	$5^{km}, 8$	$4^{km}, 8$	$4^{km}, 0$
130	$1^\circ, 10' 08''$	1326	1382	1159	969	802	651	320	$2^\circ, 53'$	$8^{km}, 0$	$8^{km}, 8$	$7^{km}, 4$	$6^{km}, 1$	$5^{km}, 2$	$4^{km}, 2$
140	$1^\circ, 15' 32''$	1538	1607	1349	1128	933	758	330	$2^\circ, 58'$	$8^{km}, 5$	$9^{km}, 4$	$7^{km}, 9$	$6^{km}, 6$	$5^{km}, 5$	$4^{km}, 5$
150	$1^\circ, 20' 55''$	1765	1850	1553	1299	1076	874	340	$3^\circ, 03'$	$9^{km}, 0$	$10^{km}, 0$	$8^{km}, 4$	$7^{km}, 0$	$5^{km}, 9$	$4^{km}, 8$
160	$1^\circ, 26' 19''$	2009	2113	1773	1483	1228	999	350	$3^\circ, 09'$	$9^{km}, 5$	$10^{km}, 6$	$8^{km}, 9$	$7^{km}, 5$	$6^{km}, 2$	$5^{km}, 1$
170	$1^\circ, 31' 42''$	2268	2392	2008	1680	1391	1132	360	$3^\circ, 14'$	$10^{km}, 0$	$11^{km}, 2$	$9^{km}, 4$	$8^{km}, 0$	$6^{km}, 6$	$5^{km}, 3$
180	$1^\circ, 37' 06''$	2542	2690	2258	1889	1565	1273								
190	$1^\circ, 42' 29''$	2833	3007	2595	2112	1750	1425								
200	$1^\circ, 47' 53''$	3139	3342	2806	2348	1946	1585								

§ 106. Rotation de la Terre. — La vitesse angulaire de rotation de la Terre qui a lieu de l'ouest à l'est autour de la ligne des pôles a pour valeur :

$$\omega = \frac{360 \times 60 \times 60}{86\,164^s} = 15,041 \text{ parseconde} \quad (380)$$

ou encore :

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164} = \frac{1 \text{ radian}}{13\,713} \text{ parseconde} \quad (381)$$

86 164 étant le nombre de secondes contenues dans un jour sidéral. Le rayon de la Terre étant :

$$R = 6\,371\,000^m,$$

la vitesse linéaire est :

$$\frac{40\,000\,000^m}{86\,164} = 464^m$$

on a: $Ra = 6\,371\,000 \times \frac{1}{13\,713} = 464^m$ par seconde

(382)

Ceci posé, soient O le point de départ, OV la direction de la vitesse initiale. Les trois axes Ox, Oy, Oz sont: Ox dans le plan tangent et le plan yOV , Oy étant le prolongement du rayon terrestre, Oz est perpendiculaire aux deux autres; x, y, z sont les coordonnées à l'époque t d'un point de la trajectoire, quand on suppose la Terre immobile (fig. 23). Ce sont ces valeurs supposées connues que donnent les théories balistiques dans lesquelles on suppose faites toutes les corrections provenant de la convergence des verticales, de la diminution de l'accélération de la pesanteur g avec l'altitude et la latitude. Nous parlerons plus loin de toutes ces corrections; x', y', z' sont les coordonnées du même point de la trajectoire relativement aux mêmes axes entraînés par le mouvement de rotation de la Terre.

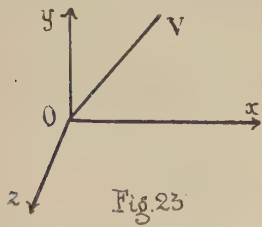


Fig. 23

Remarquons d'abord que même pour:

$$x = 200\,000^m$$

on a: $xa^2 = \frac{200\,000}{(13\,713)^2} = 0,001$,
on peut donc négliger xa^2 . Mais comme:

$$Ra = 464^m$$

on a:

$$Ra^2 = 0,034$$

nous conserverons Ra^2 dans les formules et ne négligerons que:

$$Ra^3 = 0,000\,002\,46$$

§ 107. Tir au pôle. — "Un observateur placé debout au pôle boréal tournerait sur lui-même à son insu, de droite à gauche, en vertu du mouvement diurne de la Terre. Si, dans cette position, il lançait un projectile dans une direction quelconque, il est clair que ce projectile parcourrait sa trajectoire comme si la Terre était immobile; car, en partant d'un point fixe, le projectile n'en recevrait aucune vitesse à ajouter à celle de projection qu'il reçoit par la main ou l'instrument qui l'a lancé. Le plan de tir

restant fixe dans l'espace, paraîtra à l'observateur, qui se croit en repos, se déplacer en sens inverse, c'est-à-dire marcher de gauche à droite, autour du pôle avec une vitesse angulaire égale à celle de la rotation terrestre, savoir d'une révolution en un jour sidéral, (Saint Robert, page 362).

M étant un point de la trajectoire, xOy le plan mobile qui la contient (fig. 24), $x'Oy'$ le plan mobile qui entraîne l'observateur, on a PQ étant perpendiculaire à Ox' et PR à Oz' :

$$MP = y = y',$$

$$OP = x, \quad OQ = x', \quad \text{et} \quad z = 0, \quad OR = z'.$$

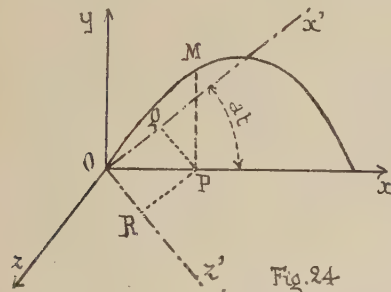


Fig. 24

De plus,

On a évidemment:

car on peut poser: $\sin \alpha t = \alpha t$.

De plus:

Il en résulte les formules de transformation:

$$x' = x,$$

$$y' = y,$$

$$z' = \alpha t x$$

(382)

Tout se borne donc à une déviation $\alpha t x$, à droite du plan de projection pour un observateur regardant la trajectoire. La déviation serait à gauche pour le pôle austral.

Supposons, par exemple,

$$x = 87\,837^m$$

et

$$t = 169,4$$

nous trouvons:

$$\alpha t x = \frac{169,4}{13\,713} \times 87\,837 = \frac{14\,879\,588}{13\,713} = 1085^m$$

La déviation à droite est donc égale à 1085 mètres.

L'atmosphère participant, par hypothèse, au mouvement de rotation de la Terre; le projectile qui part de O avec un vent nul rencontrera un vent apparent de plus en plus fort à mesure qu'il s'éloignera du pôle. Mais cette vitesse qui est très peu considérable à cause de la faiblesse de la rotation de la Terre pour une portée de 13 713 mètres pour laquelle elle ne serait que de 1 mètre par seconde n'est plus négligeable pour les très grandes

portées attendu que pour une portée de 87 837 mètres, elle est de

$$\frac{87\,837}{13\,713} = 6,406$$

§ 108. Tir dans le plan de l'équateur — Il n'y aura évidemment pas dans ce cas de déviation latérale. Si le projectile est lancé, il part avec une vitesse horizontale supplémentaire égale à $R\alpha = 464^m$. Si la Terre ne tournait pas, les axes seraient au bout du temps t en Ix, Iy'' tels que $OI = R\alpha t = 464t$. Le projectile serait en M ayant décrit sa trajectoire par rapport aux axes Ix, Iy'' comme si la Terre avait été immobile. On a ainsi :

$$PI = x,$$

$$MP = y.$$

Le mouvement de la Terre introduit deux effets (fig. 25)

1°) Effet mécanique — La trajectoire ci-dessus est supposée calculée avec une gravité dont la direction est celle de OT corrigée à l'aide des formules qui tiennent compte de la convergence des verticales et qui seront données plus loin. Mais à mesure que le projectile s'avance, cette direction change à cause de la rotation de la Terre et au temps t pour la position du point M , la direction sera $O'T$. Si donc, à cet instant, on voulait écrire les équations différentielles du mouvement par rapport aux axes Ix, Iy'' , on devrait tenir compte de ce que suivant l'axe des x , la gravité a pour composantes : $-g \sin \alpha t$ ou $-g \alpha t$ et suivant l'axe des y : $-g \cos \alpha t$ ou $-g$.

On aurait ainsi, en désignant par x'', y'' les nouvelles coordonnées de M :

$$\frac{d^2 x''}{dt^2} = -c F(w) \cos \psi - g \alpha t, \quad \text{et} \quad \frac{d^2 y''}{dt^2} = -c F(w) \sin \psi - g, \quad \left. \vphantom{\frac{d^2 x''}{dt^2}} \right\} \quad (383)$$

$$\frac{d^2 x''}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} - g \alpha t, \quad \text{et} \quad \frac{d^2 y''}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad \left. \vphantom{\frac{d^2 x''}{dt^2}} \right\} \quad (384)$$

en intégrant, et en tenant compte des conditions initiales :

$$\frac{dx''}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{1}{2} g \alpha t^2, \quad \text{et} \quad \frac{dy''}{dt} = \frac{dy}{dt}; \quad \left. \vphantom{\frac{dx''}{dt}} \right\} \quad (385)$$

une deuxième intégration donne :

$$x'' = x - \frac{1}{6} g \alpha t^3, \quad \text{et} \quad y'' = y \quad \left. \vphantom{x''} \right\} \quad (386)$$

Les constantes sont nulles ; car à l'origine, on a :

$$\frac{dx''}{dt} = \frac{dx}{dt}, \quad \text{et} \quad x'' = x$$

Pour le tir à l'Ouest, on aurait une correction en sens contraire.

Supposons, par exemple :

$$x = 87\,837^m \quad \text{et} \quad t = 169,4,$$

nous avons pour le tir à l'Est :

$$x'' = 87\,837 - \frac{1}{6} \cdot 9,8088 \times \frac{169,4^3}{13\,713} = 87\,837 - 1,6348 \times \frac{4\,861\,163}{13\,713} = 87\,837 - 580 = 87\,257^m.$$

Pour le tir à l'Ouest, on aurait :

$$x'' = 87\,837 + 580 = 88\,417^m.$$

2°) Effet dû au déplacement des axes — Nous savons que :

$$OI = R \frac{1 - \cos \alpha t}{\cos \alpha t};$$

or, en développant en série $\cos \alpha t$, il vient :

$$\cos \alpha t = 1 - \frac{\alpha^2 t^2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\alpha^6 t^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots,$$

alors :

$$OI = \frac{1 - 1 + \frac{\alpha^2 t^2}{1 \cdot 2} - \frac{\alpha^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots}{1 - \frac{\alpha^2 t^2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots} \times R = R \times \frac{\frac{\alpha^2 t^2}{1 \cdot 2} - \frac{\alpha^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots}{1 - \frac{\alpha^2 t^2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots}.$$

Prenons :

$$OI = \frac{1}{2} R \alpha^2 t^2,$$

O'I est la quantité dont I s'est abaissé au-dessous de l'horizon du canon. Nous avons :

$$IP = x''; \quad MP = y'' = y; \quad \text{puis :} \quad O'Q = x', \quad MQ = y', \quad \text{avec} \quad O'I = \frac{1}{2} R a^2 t^2.$$

Projetons sur les deux axes $O'x'$ et $O'y'$ le contour $O'IPMQO'$:

sur $O'x'$, nous avons : $IP \cos at - MP \sin at = O'Q,$

sur $O'y'$, nous avons : $O'I + IP \sin at + MP \cos at - MQ = 0;$

ce qu'on peut écrire respectivement, sur $O'x'$: $x'' \cos at - y' \sin at = x',$

" sur $O'y'$: $\frac{1}{2} R a^2 t^2 + x'' \sin at + y' \cos at - y' = 0.$

En remplaçant $\cos at$ par 1 et $\sin at$ par at , il vient :

$$\left. \begin{aligned} x'' - y' at &= x', \\ \frac{1}{2} R a^2 t^2 + x'' at + y' - y' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (387)$$

Nous en déduisons : $x' = x'' - y' at,$ et $y' = y + x'' at + \frac{1}{2} R a^2 t^2;$

et comme : $x'' = x - \frac{1}{6} g a^2 t^3,$

nous trouvons : $x' = x - y at - \frac{1}{6} g a^2 t^3,$

$$y' = y + (x - \frac{1}{6} g a^2 t^3) at + \frac{1}{2} R a^2 t^2 = y + x at + \frac{R}{2} a^2 t^2 - \frac{1}{6} g a^2 t^3;$$

et finalement, en négligeant le terme très petit $\frac{1}{6} g a^2 t^3,$

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - y at - \frac{1}{6} g a^2 t^3, \\ y' &= y + x at + \frac{1}{2} R a^2 t^2. \end{aligned} \right\} \quad (388)$$

Supposons, par exemple :

$$x = 87\,837^m, \quad \text{et} \quad t = 169^s,4$$

y étant nul, nous obtenons :

$$x' = 87\,837 - 580,$$

$$y' = 87\,837 \times \frac{169,4}{13713} + \frac{1}{2} \times 6\,371\,000 \times \left(\frac{169,4}{13713}\right)^2;$$

c'est-à-dire :

$$x' = 87\,257^m,$$

et

$$y' = 1\,085^m + 486^m = 1\,571^m.$$

§ 109. Tir à l'équateur dans le plan d'un méridien.

Supposons que le tir soit exécuté dans la direction du Nord. Soient OO' l'équateur, Ox la trace du méridien sur le plan de projection yOx (fig. 26). Si la Terre était animée d'un simple mouvement de translation de vitesse Rat , au bout du temps t , les axes seraient venus en Ix'', Iy'' tels que :

$$OI = Rat,$$

dans le plan $y''Ix''$, le projectile se serait déplacé, comme si la Terre était immobile, il serait venu en M de telle

sorte que : $IP = x,$ et $MP = y.$

Mais, comme dans le cas précédent, deux effets vont se produire.

1^{re}) Effet mécanique— Si l'on cherche les équations différentielles du mouvement dans la position $y''Ix''$, la gravité en M ne sera plus située dans le plan $y''Ix''$, car elle est devenue parallèle à $IO'T$. Ses projections sur les axes Ix'', Iy'', Iz seront respectivement :

$$0, \quad -g \cos at, \quad -g \sin at;$$

ce qu'on peut écrire

$$0, \quad -g, \quad -gat$$

On a donc trois équations différentielles du mouvement qui donnent :

$$\frac{d^2 x''}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y''}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -gat.$$

En intégrant deux fois la dernière équation différentielle, on trouve :

$$z = -\frac{1}{6} gat^3.$$

On a donc :

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x, & y'' &= y, & z &= -\frac{1}{6} gat^3. \end{aligned} \right\} \quad (389)$$

Supposons, par exemple,

$$x = 87\,837^m,$$

et

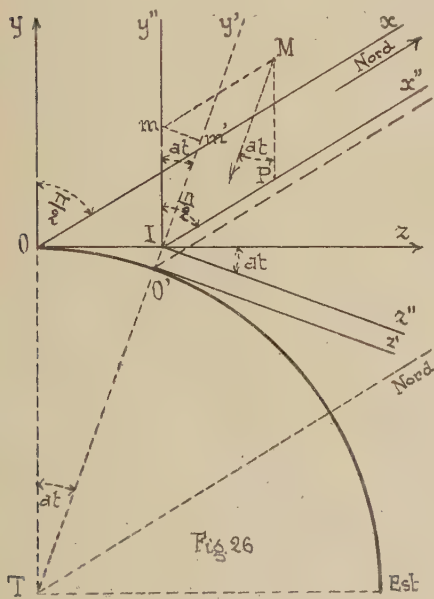
$$t = 169^s,4$$

nous trouvons :

$$x'' = 87\,837^m,$$

$$y'' = 0$$

$$z = -580^m.$$



2°) Effet du déplacement des axes. — Mais, à cause de la rotation de la Terre, au lieu d'être en Ix'' , Iy'' , Iz'' , les axes sont venus en $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$. Pour passer des uns aux autres, prenons comme axes intermédiaires les axes Ix'' , Iy'' , Iz'' , ayant même axe des x que les axes Ix'' , Iy'' , Iz'' . Le point M de la trajectoire étant dans le plan $x''y''$, on a :

$$m m' = -z'' = m l \sin \alpha t = y'' \alpha t,$$

$$I m' = y'' = m l \cos \alpha t = y;$$

donc :

$$x'' = x,$$

$$y'' = y,$$

$$z'' = -y'' \alpha t = -y \alpha t.$$

On transporte ensuite parallèlement à Iy' les axes de manière que l'origine soit en O' ; on a, comme précédemment :

$$O'l = \frac{1}{2} R \alpha^2 t^2,$$

par suite :

$$x' = x,$$

$$y' = y + \frac{1}{2} R \alpha^2 t^2,$$

$$z' = z'' = -y \alpha t.$$

Réunissant ces variations à celle due à l'effet mécanique (389), on obtient les formules suivantes :

$$x' = x,$$

$$y' = y + \frac{1}{2} R \alpha^2 t^2,$$

$$z' = -y \alpha t - \frac{1}{6} g \alpha t^3. \quad (390)$$

Il n'y a aucune modification sur la portée. La rotation de la Terre a surtout une influence sur la dérivation. Cependant, lorsque y est nul, y' ne l'est pas, car dans ce cas :

$$y' = \frac{1}{2} R \alpha^2 t^2,$$

et de ce fait, il résulte une certaine augmentation de portée provenant de la courbure de la Terre.

Supposons, par exemple :

$$x = 87837''$$

et

$$t = 169'',4$$

nous trouvons :

$$x' = 87837''$$

$$y' = 486''$$

et

$$z' = -580''$$

l'angle de chute étant égal à $64^\circ 35'$, à cause de $y' = 486''$,

la portée est augmentée de $230''$ environ.

§ 110. Tir à une latitude et dans une direction quelconques. Soient φ la latitude du point de départ O , ν l'azimut du plan de projection, angle formé par ce plan et par le plan du méridien du lieu (fig. 27). Cet angle sera compté à partir du point nord dans le sens N-E-S-O. φ varie de -90° à $+90^\circ$ et ν varie de 0° à 360° .

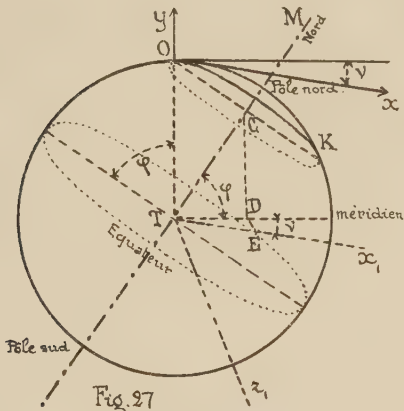


Fig. 27

Soient O le point de départ, T le centre de la Terre, TOy la verticale de O , Oyx le plan de projection qui fait avec le méridien l'angle ν . OK est le parallèle du point O , TM est l'axe de la Terre. Pour se rendre compte des effets produits par la rotation de la Terre, décomposons la en trois rotations rectangulaires :

La première autour du rayon de la Terre TO , passant par le point de départ O ;

La deuxième autour d'une parallèle Tx , menée par le point T à la ligne de projection Ox ;

La troisième autour d'une perpendiculaire Tz , menée par T au plan des deux premières.

Si TC représente sur l'axe TM la grandeur de la rotation de la Terre, les trois composantes CD , TE et DE représentent les valeurs des trois rotations composantes qui la remplacent :

Or : 1°) par rapport à la rotation CD autour de l'axe TOy , le tir exécuté en O se trouve dans les mêmes conditions que le tir exécuté au pôle par rapport à la véritable rotation de la Terre;

2°) par rapport à la rotation TE autour de l'axe Tx , le tir exécuté en O se trouve dans les mêmes conditions que le tir exécuté à l'équateur dans le plan du méridien ;

3°) par rapport à la rotation DE autour d'un axe Tz , perpendiculaire aux deux premiers axes Ty et Tx , le tir exécuté en O , se trouve dans les mêmes conditions que le tir exécuté à l'équateur dans son plan.

De cette manière, on réduit donc la question aux trois cas simples que nous avons déjà étudiés.

On aura donc au point T :

$$CD = TC \sin \varphi,$$

$$DE = TC \cos \varphi \sin \nu,$$

$$TE = TC \cos \varphi \cos \nu.$$

et comme la rotation de la Terre

$$TC = at,$$

on aura les valeurs suivantes pour les trois rotations:

- 1°) rotation autour de Ty : $at \sin \varphi$,
- 2°) rotation autour de Tx_1 : $at \cos \varphi \cos \nu$,
- 3°) rotation autour de Tz_1 : $at \cos \varphi \sin \nu$.

Remplaçons donc:

$$1^\circ) \text{ dans les formules: } \begin{matrix} x' = x, & y' = y, & z' = xat, \end{matrix}$$

$$\text{at par } at \sin \varphi, \text{ ce qui donne: } \begin{matrix} x' = x, & y' = y, & z' = xat \sin \varphi; \end{matrix}$$

2°) dans les formules:

$$\begin{matrix} x' = x, & y' = y + \frac{1}{2} Ra^2 t^2, & z' = z'' = -yat - \frac{1}{6} g a t^3; \end{matrix}$$

at par $at \cos \varphi \cos \nu$; il vient:

$$\begin{matrix} x' = x, & y' = y + \frac{1}{2} Ra^2 t^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \nu, & z' = -yat \cos \varphi \cos \nu - \frac{1}{6} g t^2 at \cos \varphi \cos \nu; \end{matrix}$$

3°) dans les formules:

$$\begin{matrix} x' = x - yat - \frac{1}{6} g a t^3, & y' = y + atx + \frac{1}{2} Ra^2 t^2, & z' = 0, \end{matrix}$$

at par $at \cos \varphi \sin \nu$, il vient:

$$\begin{matrix} x' = x - yat \cos \varphi \sin \nu - \frac{1}{6} g t^2 at \cos \varphi \sin \nu, \\ y' = y + xat \cos \varphi \sin \nu + \frac{1}{2} Ra^2 t^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \nu, \\ z' = 0. \end{matrix}$$

La rotation effectuée est telle que les coordonnées nouvelles sont:

$$\begin{matrix} x' = x - yat \cos \varphi \sin \nu - \frac{1}{6} g t^2 at \cos \varphi \sin \nu, \\ y' = y + xat \cos \varphi \sin \nu + \frac{1}{2} Ra^2 t^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \nu + \frac{1}{2} Ra^2 t^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \nu, \\ z' = xat \sin \varphi - yat \cos \varphi \cos \nu - \frac{1}{6} g t^2 at \cos \varphi \cos \nu. \end{matrix}$$

finalement:

$$\left. \begin{matrix} x' = x - at \left(y - \frac{1}{6} g t^2 \right) \cos \varphi \sin \nu, \\ y' = y + xat \cos \varphi \sin \nu + \frac{1}{2} Ra^2 t^2 \cos^2 \varphi, \\ z' = xat \sin \varphi - at \left(y + \frac{1}{6} g t^2 \right) \cos \varphi \cos \nu. \end{matrix} \right\} \quad (391)$$

§ 114 — Changement d'origine — Mais cette décomposition de la rotation unique TC en trois autres et leur transport en O a eu pour effet d'amener ce point en O' sur le grand cercle de la sphère tangent au parallèle OR (fig. 28). En effet, la rotation TC équivaut aux deux rotations CD et TD, la première ne déplace pas l'origine, la seconde la fait tourner autour du méridien OM. Or on sait qu'aux rotations, il faut adjoindre un couple qui donne lieu à une translation perpendiculaire à la rotation TD, ce qui a pour effet de ramener l'origine O' à sa véritable position O'' sur le parallèle de O.

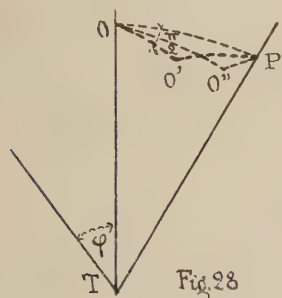


Fig. 28

Soient O' le point sur le grand cercle et O'' l'origine cherchée; on a:

$$OO' = OO'' = at \cos \varphi$$

puisque:

$$TD = TC \cos \varphi = at \cos \varphi$$

Joignons O, O', O'' au pôle P par des arcs de grand cercle; nous avons:

$$PO = PO'' = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Le triangle sphérique OPO' rectangle en O, parce que la rotation se fait autour du méridien en O, donne:

$$\cos PO' = \cos PO \cos OO' = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cos (at \cos \varphi) = \sin \varphi \cos (at \cos \varphi)$$

$$\sin \widehat{OPO'} = \frac{\sin OO'}{\sin PO'} = \frac{\sin (at \cos \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 (at \cos \varphi)}}$$

Or l'angle:

$$O'PO'' = OPO'' - OPO' = at - OPO'$$

donc:

$$\cos O'PO'' = \cos (at - OPO') = \cos at \cos OPO' + \sin at \sin OPO'$$

ou:

$$\cos O'PQ'' = \cos at \cos OPQ' + \sin at \frac{\sin(at \cos \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi)}},$$

ou encore:

$$\cos O'PQ'' = \cos at \sqrt{1 - \frac{\sin^2(at \cos \varphi)}{1 - \sin^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi)}} + \sin at \frac{\sin(at \cos \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi)}};$$

mais on a:

$$\sqrt{1 - \frac{\sin^2(at \cos \varphi)}{1 - \sin^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi)}} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi) - \sin^2(at \cos \varphi)}{1 - \sin^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi)}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi) + \sin^2(at \cos \varphi) - \sin^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi) - \sin^2(at \cos \varphi)}{1 - \sin^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi)}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi)}{1 - \sin^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi)}} = \frac{\cos \varphi \cos(at \cos \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi)}}.$$

Il en résulte que:

$$\cos O'PQ'' = \cos at \cdot \frac{\cos \varphi \cos(at \cos \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi)}} + \sin at \frac{\sin(at \cos \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi)}},$$

ou

$$\cos O'PQ'' = \frac{\cos at \cos \varphi \cos(at \cos \varphi) + \sin at \sin(at \cos \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi)}}.$$

Dans le triangle sphérique $O'PQ''$ on connaît alors les deux côtés PQ' et PQ'' et l'angle compris $O'PQ''$. On a donc:

$$\cos O'Q'' = \cos PQ' \cos PQ'' + \sin PQ' \sin PQ'' \cos O'PQ''$$

ou

$$\cos O'Q'' = \sin \varphi \cos(at \cos \varphi) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi)} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \frac{\cos \varphi \cos at \cos(at \cos \varphi) + \sin at \sin(at \cos \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2(at \cos \varphi)}}$$

finalement:

$$\cos O'Q'' = \sin^2 \varphi \cos(at \cos \varphi) + \cos^2 \varphi \cos at \cos(at \cos \varphi) + \cos \varphi \sin at \sin(at \cos \varphi);$$

mais en développant en séries:

$$\cos(at \cos \varphi) = 1 - \frac{a^2 t^2 \cos^2 \varphi}{1 \cdot 2} + \frac{a^4 t^4 \cos^4 \varphi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots,$$

$$\cos at = 1 - \frac{a^2 t^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{a^6 t^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots,$$

$$\sin(at \cos \varphi) = at \cos \varphi - \frac{a^3 t^3 \cos^3 \varphi}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{a^5 t^5 \cos^5 \varphi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots,$$

$$\sin at = at - \frac{a^3 t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{a^5 t^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots;$$

donc:

$$\cos O'Q'' = \sin^2 \varphi \left(1 - \frac{a^2 t^2 \cos^2 \varphi}{1 \cdot 2} + \frac{a^4 t^4 \cos^4 \varphi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots\right) + \cos^2 \varphi \left(1 - \frac{a^2 t^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots\right) \times$$

$$\left(1 - \frac{a^2 t^2 \cos^2 \varphi}{1 \cdot 2} + \frac{a^4 t^4 \cos^4 \varphi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots\right) + \cos \varphi \left(at - \frac{a^3 t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{a^5 t^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots\right) \left(at \cos \varphi - \frac{a^3 t^3 \cos^3 \varphi}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\right),$$

ce qui donne:

$$\cos O'Q'' = \sin^2 \varphi - \frac{a^2 t^2}{1 \cdot 2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \dots + \cos^2 \varphi - \frac{a^2 t^2}{1 \cdot 2} \cos^2 \varphi - \frac{a^2 t^2}{1 \cdot 2} \cos^4 \varphi + \dots + a^2 t^2 \cos^2 \varphi + \dots$$

$$+ \sin^2 \varphi \frac{a^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^4 \varphi + \frac{a^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^2 \varphi + \frac{a^4 t^4}{4} \cos^4 \varphi + \frac{a^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^6 \varphi - \frac{a^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^2 \varphi - \frac{a^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^4 \varphi + \dots,$$

ou

$$\cos O'Q'' = 1 + \frac{a^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) + \frac{a^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^2 \varphi + \frac{a^4 t^4}{4} \cos^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi)$$

$$+ \frac{a^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi)^2 - \frac{a^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^2 \varphi - \frac{a^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) + \dots$$

Le terme indépendant de at est:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1,$$

le terme en $a^2 t^2$ a un coefficient nul,le terme en $a^4 t^4$ est:

$$\frac{3a^4 t^4}{24} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = \frac{1}{8} a^4 t^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

On a donc finalement:

$$\cos O'O'' = 1 - \frac{3a^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \dots = 1 - \frac{a^4 t^4}{8} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \dots,$$

ce qu'on peut encore écrire :

$$\cos O'O'' = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{a^2 t^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi \right)^2 + \dots,$$

par conséquent :

$$O'O'' = \frac{a^2 t^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi,$$

la distance OO' est donc :

$$OO' = \frac{1}{2} R a^2 t^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Enfin, l'angle $O'O'P$ a pour expression :

$$\sin O'O'P = \sin O'P O'' \frac{\sin PO''}{\sin O'O''};$$

mais :

$$\sin PO'' = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos \varphi, \quad \text{et} \quad \sin O'O'' = \sin (at \cos \varphi).$$

Calculons $\sin O'P O''$; nous avons :

$$\sin O'P O'' = \sin (at - OP O') = \sin at \cos OP O' - \cos at \sin OP O',$$

or nous savons que :

$$\sin OP O' = \frac{\sin (at \cos \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 (at \cos \varphi)}};$$

nous en déduisons pour $\cos OP O'$:

$$\cos OP O' = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 (at \cos \varphi)}{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 (at \cos \varphi)}} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 (at \cos \varphi) - \sin^2 (at \cos \varphi)}{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 (at \cos \varphi)}}, \quad \text{ou encore :}$$

$$\cos OP O' = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \varphi [1 - \sin^2 (at \cos \varphi)] - \sin^2 (at \cos \varphi)}{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 (at \cos \varphi)}} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi \cos^2 (at \cos \varphi) - 1 + \cos^2 (at \cos \varphi)}{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 (at \cos \varphi)}}$$

et en simplifiant

$$\cos OP O' = \sqrt{\frac{\cos^2 (at \cos \varphi) (1 - \sin^2 \varphi)}{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 (at \cos \varphi)}} = \frac{\cos \varphi \cos (at \cos \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 (at \cos \varphi)}}.$$

Il en résulte :

$$\sin OP O' = \left[\frac{\sin at \cos \varphi \cos (at \cos \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 (at \cos \varphi)}} - \frac{\cos at \sin (at \cos \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 (at \cos \varphi)}} \right] \frac{\cos \varphi}{\sin (at \cos \varphi)},$$

et finalement

$$\sin OP O' = \frac{[\sin at \cos \varphi \cos (at \cos \varphi) - \cos at \sin (at \cos \varphi)] \cos \varphi}{\sin (at \cos \varphi) \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 (at \cos \varphi)}}.$$

Les coordonnées du point O'' par rapport au point O' sont alors :

suyant $O'x$,

$$\frac{1}{2} R a^2 t^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \nu,$$

suyant $O'z$,

$$-\frac{1}{2} R a^2 t^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \nu.$$

Par suite, on a les équations cherchées :

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - at \left(y + \frac{1}{6} g t^2 \right) \cos \varphi \sin \nu - \frac{1}{2} R a^2 t^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \nu, \\ y' &= y + x at \cos \varphi \sin \nu + \frac{1}{2} R a^2 t^2 \cos^2 \varphi, \\ z' &= x at \sin \varphi - at \left(y + \frac{1}{6} g t^2 \right) \cos \varphi \cos \nu + \frac{1}{2} R a^2 t^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \nu. \end{aligned} \right\} \quad (398)$$

Pour avoir les écarts au point de chute, il suffit de remplacer x par X , y par zéro et t par la durée totale de Trajet T ; on obtient alors :

$$\left. \begin{aligned} X' &= X - \frac{1}{6} g a T^3 \cos \varphi \sin \nu - \frac{1}{2} R a^2 T^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \nu, \\ Y' &= a T X \cos \varphi \sin \nu + \frac{1}{2} R a^2 T^2 \cos^2 \varphi, \\ Z' &= a T X \sin \varphi - \frac{1}{6} g a T^3 \cos \varphi \cos \nu + \frac{1}{2} R a^2 T^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \nu. \end{aligned} \right\} \quad (399)$$

Supposons :

$$X = 87837^m, \quad T = 169^s,4$$

et

$$\varphi = 49^\circ N, \quad z = 200^m;$$

la pièce allemande qui tirait sur Paris devait être orientée de façon que le plan de projection admette l'azimut : $\nu = 45^\circ$ si elle avait tiré vers le Nord, mais comme elle tirait vers le Sud $\nu = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$

Il en résulte : $\cos \varphi = 0,656\ 06$ $\sin \varphi = 0,754\ 71$
 $\cos \gamma = -0,731\ 35,$ $\sin \gamma = -0,682\ 00$

de sorte que :

$$X' = 87\ 837 + 580 \times 0,656\ 06 \times 0,682\ 00 + 486 \times 0,754\ 71 \times 0,656\ 06 \times 0,731\ 35,$$

$$Y' = \frac{-169,4}{13\ 713} \times 87\ 837 \times 0,656\ 06 \times 0,682\ 00 + 486 \times 0,656\ 06^2,$$

$$Z' = \frac{169,4}{13\ 713} \times 87\ 837 \times 0,754\ 71 + 580 \times 0,656\ 06 \times 0,731\ 35 - 486 \times 0,754\ 71 \times 0,656\ 06 \times 0,682\ 00;$$

ce qui donne :

$$X' = 87\ 837 + 260 + 176 = 87\ 837 + 436,$$

$$Y' = -1\ 085 \times 0,656\ 06 \times 0,682\ 00 + 486 \times 0,430\ 41 = -1\ 085 + 209,$$

$$Z' = 1\ 085 \times 0,754\ 71 + 580 \times 0,479\ 81 - 486 \times 0,754\ 71 \times 0,479\ 81 = 819 + 278 - 169,$$

finalement :

$$X' = 88\ 273^m, \quad Y' = -276^m, \quad Z' = 928^m$$

L'angle de chute étant égal à $64^\circ 35'$, à la valeur de :

$$X' = 88\ 273^m$$

correspond une augmentation de portée de 300 mètres environ, de sorte que la portée est en réalité égale à :

$$88\ 273 + 300 = 88\ 573.$$

Chapitre XX.

Des Corrections à apporter aux éléments du tir provenant de la variation de la Gravité.

§ 112. Attraction terrestre. — En vertu de la loi connue de l'attraction ou de la gravitation universelle, deux corps quelconques exercent l'un sur l'autre une attraction directement proportionnelle aux masses de ces corps et inversement proportionnelle au carré de leur distance. Par suite, la masse terrestre exerce sur tous les corps de sa surface une attraction qui est la cause de la chute des corps. Dans leur chute, dans le vide, tous les corps, quel que soit leur poids spécifique, sont soumis à un même mouvement accéléré. La valeur de l'accélération par seconde, à Paris, réduite au vide et au niveau de la mer, a été trouvée égale à $9^m,8088$; cette valeur est représentée par g .

Pour mesurer l'accélération produite par la gravité à la surface de la Terre, on emploie le pendule à secondes. En un lieu donné, la durée de l'oscillation d'un pendule étant en raison inverse de la racine carrée de l'intensité de la pesanteur, il suffit de mesurer la durée d'oscillation pour en déduire l'intensité de la pesanteur. L'observation a montré que l'intensité de la pesanteur va en croissant de l'équateur vers les pôles. Cette variation provient de l'aplatissement des pôles et de la force centrifuge produite par le mouvement de rotation de la Terre. L'observation du pendule peut donc servir à évaluer l'aplatissement terrestre. C'est ainsi qu'on a obtenu :

Les mesures géodésiques donnent :

$$\frac{1}{292,2 \pm 1,5}$$

La discussion des observations à différentes latitudes a donné les résultats suivants :

Latitude	Longueur du pendule à secondes	Valeur de l'accélération.
0° (équateur).....	$0^m,991\ 03$	$9^m,781\ 03$
45°	$0,993\ 56$	$9,806\ 06$
90° (pôle).....	$0,996\ 10$	$9,831\ 09$

Dans un lieu dont la latitude est φ , on a :

$$l = 0,993\,563 - 0,002\,536 \cos 2\varphi, \quad (394)$$

$$\text{et: } g = 9,806\,059 - 0,025\,028 \cos 2\varphi. \quad (395)$$

$$\text{A Paris, on a: } l = 0,993\,9 \quad \text{et} \quad g = 9,809\,4.$$

L'intensité de l'attraction terrestre diminue à mesure qu'on s'élève au-dessus du niveau de la mer. Bouguer a constaté qu'un pendule qui faisait en 24 heures 98 770 oscillations à Paris, n'en faisait plus que 98 740 à Quito, située à une altitude plus grande que Paris, et 98 720 au sommet du Pichincha, à 1500 mètres environ au-dessus de Quito.

En désignant par R le rayon de la Terre, par z l'altitude, l'accélération g' correspondant à cette altitude est fournie par la relation :

$$\frac{g}{(R+z)^2} = \frac{g'}{R^2}. \quad (396)$$

La gravité varie en raison inverse du carré de la distance au centre de la Terre.

z étant petit vis à vis le rayon R de la Terre, on peut écrire :

$$g' = g \left(\frac{R}{R+z} \right)^2 = g \left(1 - \frac{z}{R} \right)^2 = g \left(1 - 2 \frac{z}{R} \right), \quad (397)$$

et en remplaçant g par sa valeur en fonction de la latitude φ , on a la formule complète :

$$g' = (9,806\,059 - 0,025\,028 \cos 2\varphi) \left(\frac{R}{R+z} \right)^2, \quad (398)$$

$$\text{ou: } g' = (9,806\,059 - 0,025\,028 \cos 2\varphi) \left(1 - 2 \frac{z}{R} \right). \quad (399)$$

Pour $\varphi = 49^\circ$, on a :

$$\cos 2\varphi = \cos 98^\circ = -\cos 82^\circ = -0,139\,17.$$

$$\text{et: } g' = (9,806\,059 + 0,025\,028 \times 0,139\,17) \left(\frac{R}{R+z} \right)^2 = (9,806\,059 + 0,003\,483) \left(\frac{R}{R+z} \right)^2 = 9,809\,542 \left(\frac{R}{R+z} \right)^2$$

Au niveau de la mer on trouve pour :

φ	g'	φ	g'	φ	g'	φ	g'
0°	9,781 03	47°	9,807 80	50°	9,810 41	53°	9,812 96
45	9,806 06	48	9,808 68	51	9,811 26	90	9,831 09
46	9,806 93	49	9,809 54	52	9,812 11		

Si dans l'expression: $\left(\frac{R}{R+z} \right)^2$, on fait $z = 60\,000^m$, on trouve : 0,9817.

et " $\left(1 - \frac{2z}{R} \right)$, " $z = 60\,000^m$, " 0,9812

La Table ci-après donne les valeurs de g' calculées par la formule (398), pour :

$\varphi = 0^\circ$, $\varphi = 45^\circ$, $\varphi = 49^\circ$, $\varphi = 53^\circ$, $\varphi = 90^\circ$.

$\varphi \backslash z$	0°	45°	49°	53°	90°	$\varphi \backslash z$	0°	45°	49°	53°	90°
0^m	9,781	9,806	9,810	9,813	9,831	$9\,000^m$	9,753	9,778	9,782	9,785	9,803
$1\,000$	9,778	9,803	9,807	9,810	9,828	$10\,000$	9,750	9,775	9,778	9,782	9,800
$2\,000$	9,775	9,800	9,804	9,807	9,825	$11\,000$	9,747	9,772	9,775	9,779	9,797
$3\,000$	9,772	9,797	9,801	9,804	9,822	$12\,000$	9,744	9,769	9,772	9,776	9,794
$4\,000$	9,768	9,793	9,797	9,800	9,818	$13\,000$	9,741	9,766	9,769	9,773	9,791
$5\,000$	9,765	9,790	9,794	9,797	9,815	$14\,000$	9,738	9,763	9,766	9,770	9,788
$6\,000$	9,762	9,787	9,791	9,794	9,812	$15\,000$	9,735	9,760	9,763	9,767	9,785
$7\,000$	9,759	9,784	9,788	9,791	9,809	$16\,000$	9,732	9,757	9,760	9,764	9,782
$8\,000$	9,756	9,781	9,785	9,788	9,806	$17\,000$	9,729	9,754	9,757	9,761	9,779

$\varphi \backslash z$	0°	45°	49°	53°	90°	$\varphi \backslash z$	0°	45°	49°	53°	90°
18 000 ^m	9,726	9,751	9,754	9,758	9,776	40 000 ^m	9,659	9,683	9,687	9,690	9,708
19 000	9,722	9,747	9,751	9,754	9,772	41 000	9,656	9,680	9,684	9,687	9,705
20 000	9,719	9,744	9,748	9,751	9,769	42 000	9,653	9,677	9,681	9,684	9,702
21 000	9,716	9,741	9,745	9,748	9,766	43 000	9,650	9,674	9,678	9,681	9,699
22 000	9,713	9,738	9,742	9,745	9,763	44 000	9,647	9,671	9,675	9,678	9,696
23 000	9,710	9,735	9,739	9,742	9,760	45 000	9,644	9,668	9,672	9,675	9,693
24 000	9,707	9,732	9,736	9,739	9,757	46 000	9,641	9,665	9,669	9,672	9,690
25 000	9,704	9,729	9,733	9,736	9,754	47 000	9,638	9,662	9,666	9,669	9,687
26 000	9,701	9,726	9,730	9,733	9,751	48 000	9,635	9,659	9,663	9,666	9,684
27 000	9,698	9,723	9,727	9,730	9,748	49 000	9,632	9,656	9,660	9,663	9,681
28 000	9,695	9,720	9,723	9,727	9,745	50 000	9,629	9,653	9,657	9,660	9,678
29 000	9,692	9,717	9,720	9,724	9,742	51 000	9,626	9,650	9,654	9,657	9,675
30 000	9,689	9,714	9,717	9,721	9,739	52 000	9,623	9,647	9,651	9,654	9,672
31 000	9,686	9,711	9,714	9,718	9,736	53 000	9,620	9,644	9,648	9,651	9,669
32 000	9,683	9,708	9,711	9,715	9,733	54 000	9,617	9,641	9,645	9,648	9,666
33 000	9,680	9,705	9,708	9,712	9,730	55 000	9,614	9,638	9,642	9,645	9,663
34 000	9,677	9,702	9,705	9,709	9,727	56 000	9,611	9,635	9,639	9,642	9,660
35 000	9,674	9,699	9,702	9,706	9,724	57 000	9,608	9,632	9,636	9,639	9,657
36 000	9,671	9,696	9,699	9,703	9,721	58 000	9,605	9,629	9,633	9,636	9,654
37 000	9,668	9,692	9,696	9,699	9,717	59 000	9,602	9,626	9,630	9,633	9,651
38 000	9,665	9,689	9,693	9,696	9,714	60 000	9,599	9,623	9,627	9,630	9,648
39 000	9,662	9,686	9,690	9,693	9,711						

§ 113. Variation de la gravité avec l'altitude — Soient g la gravité en un point M situé à la surface de la Terre, g' la gravité en un autre point M' situé sur la verticale du point M à l'altitude z , et R le rayon de la Terre; d'après la loi de Newton, on a: $\frac{g}{g'} = \frac{(R+z)^2}{R^2}$. (400)

La gravité varie en raison inverse du carré de la distance au centre de la Terre.

On en déduit:

$$g' = g \left(\frac{R}{R+z} \right)^2. \quad (401)$$

Or: $\frac{R}{R+z} = 1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z^3}{R^3} + \frac{z^4}{R^4} - \frac{z^5}{R^5} + \dots$

et: $\left(\frac{R}{R+z} \right)^2 = 1 - \frac{2z}{R} + \frac{3z^2}{R^2} - \frac{4z^3}{R^3} + \frac{5z^4}{R^4} - \frac{6z^5}{R^5} + \dots$

comme z est toujours petit par rapport à R , on peut négliger les termes à partir du troisième et écrire:

$$\left(\frac{R}{R+z} \right)^2 = 1 - \frac{2z}{R}. \quad (402)$$

par suite:

$$g' = g \left(1 - 2 \frac{z}{R} \right) \quad (403)$$

La valeur de g en un point de la surface de la Terre et au niveau de la mer dont la latitude est φ est:

$$g = 9,806\,059 - 0,025\,028 \cos 2\varphi \quad (404)$$

La valeur moyenne de R est:

$$R = 6\,371\,000^m$$

Pour des valeurs de z ne dépassant pas 5 000^m, le facteur $\left(\frac{R}{R+z} \right)^2$ a encore la valeur: 0,998 7

À la latitude de 49° , on a:
 au lieu de: $g = 9^m,793\ 84$
 d'où la différence: $g = 9^m,809\ 54$
 $g - g' = 0^m,015\ 70$,

à l'altitude de $5\ 000^m$,
 au niveau de la mer,

Cette différence est négligeable. Mais, il n'en est plus de même lorsque $z = 50\ 000^m$
 auquel cas:

$$\left(\frac{R}{R+z}\right)^2 = 0,984\ 5$$

et:
 au lieu de: $g' = 9^m,657\ 49$
 d'où la différence: $g = 9^m,809\ 54$
 $g - g' = 0^m,152\ 05$

à l'altitude de $50\ 000^m$,
 au niveau de la mer,

Cette différence n'est plus négligeable.

§ 114 - Equations différentielles. — Dans ce cas, les équations différentielles du mouvement deviennent:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -c F(w) \cos \psi, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -g \left(1 - \frac{2y}{R}\right) - c F(w) \sin \psi, \end{aligned} \right\} \quad (405)$$

de plus, les équations:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(w \cos \psi)}{d\psi} &= \frac{cw F(w)}{g \left(1 - 2\frac{y}{R}\right)}, \\ w \frac{d\psi}{dt} &= -g \left(1 - 2\frac{y}{R}\right) \cos \psi \end{aligned} \right\} \quad (406)$$

et:

jointes aux relations:

$$\frac{dx}{dt} = w \cos \psi \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = w \sin \psi$$

constituent les équations différentielles du mouvement.

§ 115 - Application au cas du vide. — Voyons quelle est la correction à apporter au mouvement d'un projectile se déplaçant dans le vide. Nous avons alors:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \left(\frac{R}{y+R}\right)^2 \quad (407)$$

vu la petitesse de y , vis à vis R , nous pouvons remplacer $\left(\frac{R}{y+R}\right)^2$ par: $1 - 2\frac{y}{R}$,
 ce qui donne l'équation différentielle:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \left(1 - 2\frac{y}{R}\right), \quad (408)$$

Posons:

$$z = 1 - 2\frac{y}{R};$$

il vient:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2}{R} \frac{dy}{dt}$$

donc:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{R}{2} \frac{d^2z}{dt^2};$$

et l'équation (408) peut s'écrire:

$$-\frac{R}{2} \frac{d^2z}{dt^2} = -gz,$$

ou encore:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 2 \frac{g}{R} z = m^2 z, \quad (409)$$

en posant:

$$2 \frac{g}{R} = m^2$$

L'intégrale générale de cette équation différentielle (409) est:

$$z = e^{\frac{mt+a}{2}} + e^{\frac{-mt+b}{2}} \quad (410)$$

a et b étant des constantes, car:

$$\frac{dz}{dt} = m e^{\frac{mt+a}{2}} - m e^{\frac{-mt+b}{2}},$$

Or, pour $t=0$, on a: $y=0$ et par suite:

$$z=1$$

$$\text{et: } \frac{d^2z}{dt^2} = m^2 e^{\frac{mt+a}{2}} + m^2 e^{\frac{-mt+b}{2}} = m^2 z$$

et pour $t=0$,

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2}{R} V \sin \alpha.$$

Il en résulte les relations:

$$1 = e^a + e^b, \quad (411)$$

$$-\frac{2}{R} V \sin \alpha = -\frac{m^2}{g} V \sin \alpha = m(e^a - e^b),$$

ou:

$$-\frac{m}{g} V \sin \alpha = e^a - e^b \quad (412)$$

Les équations (411) et (412) permettent de calculer a et b . On trouve:

$$e^a = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m}{g} V \sin \alpha \right), \quad \text{et} \quad e^b = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{g} V \sin \alpha \right);$$

donc:

$$z = e^a \cdot e^{mt} + e^b \cdot e^{-mt} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{m}{g} V \sin \alpha \right) e^{mt} + \left(1 + \frac{m}{g} V \sin \alpha \right) e^{-mt} \right].$$

Or:

$$e^{\pm mt} = 1 \pm \frac{mt}{1} + \frac{m^2 t^2}{1 \cdot 2} \pm \frac{m^3 t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \pm \frac{m^5 t^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

donc:

$$z = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{mt}{1} + \frac{m^2 t^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^3 t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + 1 - \frac{mt}{1} + \frac{m^2 t^2}{1 \cdot 2} - \frac{m^3 t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right] + \frac{1}{2} \left[-\frac{m}{g} V \sin \alpha \left(1 + \frac{mt}{1} + \frac{m^2 t^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^3 t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots - 1 + \frac{mt}{1} - \frac{m^2 t^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^3 t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots \right) \right];$$

et en simplifiant:

$$z = \frac{1}{2} \left[2 + 2 \frac{m^2 t^2}{1 \cdot 2} + 2 \frac{m^4 t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots - 2 \frac{m^2}{g} V \sin \alpha \cdot t - 2 \frac{m^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 g} V \sin \alpha \cdot t^3 - \dots \right],$$

finalemment:

$$z = 1 - \frac{m^2}{g} V \sin \alpha \cdot t + \frac{m^2}{2} t^2 - \frac{m^4}{6g} V \sin \alpha \cdot t^3 + \frac{m^4}{24} t^4 - \dots, \quad (413)$$

et l'équation: $y = \frac{R-Rz}{2}$ de la trajectoire devient:

$$y = \frac{R}{2} - \frac{R}{2} + \frac{m^2 R}{2g} V \sin \alpha \cdot t - \frac{m^2 R}{4} t^2 + \frac{m^4 R}{12g} V \sin \alpha \cdot t^3 - \frac{m^4 R}{48} t^4 + \dots;$$

et comme:

$$m^2 = 2 \frac{g}{R},$$

on trouve:

$$y = V \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2 + \frac{g}{3R} \left(V \sin \alpha \cdot t^3 - \frac{g}{4} t^4 \right) + \dots;$$

mais

$$t = \frac{x}{V \cos \alpha}$$

donc, finalement:

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos^2 \alpha} + \frac{g}{3R} \cdot \frac{x^3}{V^3 \cos^3 \alpha} \left(V \sin \alpha - \frac{g x}{4 V \cos \alpha} \right) + \dots \quad (414)$$

Pour avoir l'augmentation ∂X résultant de la variation de g , posons:

$$y = 0,$$

et

$$x = X + \partial X,$$

nous trouvons successivement:

$$0 = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos^2 \alpha} + \frac{g}{3R} \cdot \frac{x^3}{V^3 \cos^3 \alpha} \left(V \sin \alpha - \frac{g x}{4 V \cos \alpha} \right),$$

et en supprimant la solution $x=0$,

$$0 = \tan \alpha - \frac{g x}{2 V^2 \cos^2 \alpha} + \frac{g}{3R} \cdot \frac{x^2}{V^3 \cos^3 \alpha} \left(V \sin \alpha - \frac{g x}{4 V \cos \alpha} \right),$$

puis remplaçant x par $X + \partial X$:

$$0 = \tan \alpha - \frac{g(X + \partial X)}{2 V^2 \cos^2 \alpha} - \frac{g}{3R} \cdot \frac{(X + \partial X)^2}{V^3 \cos^3 \alpha} \left[V \sin \alpha - \frac{g(X + \partial X)}{4 V \cos \alpha} \right],$$

ce qui donne:

$$0 = \tan \alpha - \frac{gX}{2 V^2 \cos^2 \alpha} - \frac{g \partial X}{2 V^2 \cos^2 \alpha} + \frac{g X^2 \sin \alpha}{3 R V^2 \cos^3 \alpha} - \frac{g^2 X^3}{12 R V^4 \cos^4 \alpha},$$

en négligeant les autres termes.

Or:

$$X = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{2V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g},$$

alors:

$$\frac{gX}{2V^2 \cos^2 \alpha} = \frac{2gV^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2gV^2 \cos^2 \alpha} = \tan \alpha,$$

donc:

$$0 = -\frac{g \partial X}{2V^2 \cos^2 \alpha} + \frac{gX^2}{3RV^3 \cos^3 \alpha} \left(V \sin \alpha - \frac{gX}{4V \cos \alpha} \right).$$

En multipliant par $V^2 \cos^2 \alpha$, il vient:

$$0 = -\frac{\partial X}{2} + \frac{X^2}{3RV \cos \alpha} \left(V \sin \alpha - \frac{gX}{4V \cos \alpha} \right),$$

ce qui donne:

$$\partial X = \frac{2}{3} \cdot \frac{X^2}{RV \cos \alpha} \left(V \sin \alpha - \frac{gX}{4V \cos \alpha} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{X^2}{RV \cos \alpha} \times \frac{4V^2 \sin \alpha \cos \alpha - gX}{4V \cos \alpha},$$

mais:

$$4V^2 \sin \alpha \cos \alpha = 2gX,$$

donc:

$$\partial X = \frac{2}{3} \cdot \frac{X^2}{RV \cos \alpha} \cdot \frac{gX}{4V \cos \alpha} = \frac{1}{3} \cdot \frac{X^2}{R} \cdot \frac{gX}{2V^2 \cos^2 \alpha},$$

et en remplaçant X par:

$$X = \frac{2V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g},$$

on trouve:

$$\partial X = \frac{1}{3} \cdot \frac{X^2}{R} \cdot \frac{g}{2V^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{2V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{1}{3} \cdot \frac{X^2}{R} \cdot \tan \alpha. \quad (415)$$

Pour l'angle de portée maximum dans le vide, c'est-à-dire pour:

$$\alpha = 45^\circ,$$

on a: $\tan \alpha = 1$; et la formule (415) se réduit à:

$$\partial X = \frac{X^2}{3R}. \quad (416)$$

La Table ci-dessous donne les valeurs de ∂X quand X varie de 0^{km} à 200^{km}, l'argument étant 5^{km}, et le rayon moyen de la Terre ayant la valeur: $R = 6\,371\,000^m$.

X	X ²	∂X	Diff.	X	X ²	∂X	Diff.	X	X ²	∂X	Diff.	X	X ²	∂X	Diff.
0 ^{km}	0	0,000		55 ^{km}	3 025	0,158	27	110 ^{km}	12 100	0,633	56	165 ^{km}	27 225	1,424	85
5	25	0,001	1	60	3 600	0,188	30	115	13 225	0,692	59	170	28 900	1,512	88
10	100	0,005	4	65	4 225	0,221	33	120	14 400	0,753	61	175	30 625	1,602	90
15	225	0,012	7	70	4 900	0,256	35	125	15 625	0,817	64	180	32 400	1,695	93
20	400	0,021	9	75	5 625	0,294	38	130	16 900	0,884	67	185	34 225	1,791	96
25	625	0,033	12	80	6 400	0,335	41	135	18 225	0,953	69	190	36 100	1,889	98
30	900	0,047	14	85	7 225	0,378	43	140	19 600	1,025	72	195	38 025	1,989	100
35	1 225	0,064	17	90	8 100	0,423	45	145	21 025	1,100	75	200	40 000	2,092	103
40	1 600	0,084	20	95	9 025	0,472	49	150	22 500	1,177	77				
45	2 025	0,106	22	100	10 000	0,523	51	155	24 025	1,257	80				
50	2 500	0,131	25	105	11 025	0,577	54	160	25 600	1,339	82				

§ 116. Application au cas général. — Reprenons l'équation de la trajectoire:

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2\cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{V^2} + Kx \right),$$

qui donne la portée X , en y faisant:

$$y = 0,$$

$$X = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4KV^4 \sin 2\alpha}{g}} - 1 \right), \quad (417)$$

si l'accélération g devient g' , la portée X' correspondante est:

$$X' = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4KV^4 \sin 2\alpha}{g'}} - 1 \right), \quad (418)$$

nous voyons que toutes choses égales d'ailleurs, la portée X croît quand l'accélération g décroît; on a donc:

$$X' > X, \quad \text{pour:} \quad g' < g.$$

Or:

$$\frac{X'}{X} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4RV^4 \sin 2\alpha}{g'}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{4RV^4 \sin 2\alpha}{g}} - 1}. \quad (419)$$

Si Y_s est l'altitude du sommet S de la trajectoire, on peut remplacer g par la moyenne arithmétique:

$$\frac{1}{2} \left[g + g \left(1 - 2 \frac{Y_s}{R} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(2g - 2g \frac{Y_s}{R} \right) = g \left(1 - \frac{Y_s}{R} \right).$$

En particulier, pour:

$$\alpha = 45^\circ,$$

on a:

$$\frac{X'_{45^\circ}}{X_{45^\circ}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4RV^4}{g'}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{4RV^4}{g}} - 1}. \quad (420)$$

Montrons que le rapport $\frac{X'}{X}$ varie très peu et diffère peu de l'unité, même pour des valeurs très grandes de X , et par suite de Y_s . Ainsi, pour: $Y_s = 60\,000^m$

on a:

$$g' = g \left(1 - \frac{60\,000}{6\,371\,000} \right) = g \left(1 - \frac{60}{6\,371} \right) = 0,9906g.$$

Dans cette hypothèse, on a; pour:

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\frac{X'_{45^\circ}}{X_{45^\circ}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{4RV^4}{0,9906g}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{4RV^4}{g}} - 1}. \quad (421)$$

Pour les valeurs suivantes de $\frac{4RV^4}{g}$, nous trouvons pour: $\frac{4RV^4}{0,9906g}$ les valeurs:

$\frac{4RV^4}{g}$	$\frac{4RV^4}{0,9906g}$	$\frac{4RV^4}{g}$	$\frac{4RV^4}{0,9906g}$
1	1,009	1 000	1 009,489
5	5,047	1 500	1 513,234
10	10,095	2 000	2 018,978
50	50,474	2 500	2 523,723
100	100,949	3 000	3 037,467
500	504,745	5 000	5 047,446

Il en résulte pour:

$$\sqrt{1 + \frac{4RV^4}{g'}} - 1,$$

$$\sqrt{1 + \frac{4RV^4}{g}} - 1,$$

et

$$\frac{X'}{X}$$

les valeurs consignées dans la Table ci-dessous.

$\frac{4RV^4}{g}$	$\frac{4RV^4}{g'}$	$\sqrt{1 + \frac{4RV^4}{g'}} - 1$	$\sqrt{1 + \frac{4RV^4}{g}} - 1$	$\frac{X'}{X}$	$\frac{4RV^4}{g}$	$\frac{4RV^4}{g'}$	$\sqrt{1 + \frac{4RV^4}{g'}} - 1$	$\sqrt{1 + \frac{4RV^4}{g}} - 1$	$\frac{X'}{X}$
1	1,009	0,4174	0,4142	1,008	1 000	1 009,489	30,7882	30,6386	1,005
5	5,047	1,4591	1,4495	1,007	1 500	1 513,234	37,9132	37,7427	1,005
10	10,095	2,3309	2,3166	1,006	2 000	2 018,978	43,9441	43,7325	1,005
50	50,474	6,1745	6,1414	1,005	2 500	2 523,723	49,2466	49,0099	1,005
100	100,949	9,0970	9,0499	1,005	3 000	3 037,467	54,1223	53,7814	1,005
500	504,745	21,4888	21,3830	1,005	5 000	5 047,446	70,0524	69,7177	1,005

Cette Table montre que même pour :

$$y_s = 60\,000^m$$

l'erreur provenant de la variation de la gravité avec l'altitude n'excède pas : $\frac{5}{1000} X = \frac{X}{200}$.

On arrivait à la même conclusion si l'on envisageait l'angle α_m de portée maximum :

$$\alpha_m = 51^\circ 50'$$

Ici fait, voyons comment varie le rapport $\frac{X'}{X}$ pour une valeur déterminée de $\frac{4RV^4}{g}$ lors que la flèche y_s varie de 0^m à 60^m , l'argument étant 5 kilomètres. Nous avons :

$$\frac{1\,000}{6\,371\,000} = \frac{1}{6\,371} = 0,000\,156\,96$$

par suite :

$$g' = g (1 - 0,000\,156\,96 y_s)$$

nous en déduisons la Table suivante des valeurs pour g' et le rapport $\frac{X'}{X}$, quand $\frac{4RV^4}{g} = 1\,000$:

y_s km	$\frac{g'}{g}$	$\frac{4RV^4}{g}$	$\sqrt{1 + \frac{4RV^4}{g}} - 1$	$\frac{X'}{X}$	y_s km	$\frac{g'}{g}$	$\frac{4RV^4}{g}$	$\sqrt{1 + \frac{4RV^4}{g}} - 1$	$\frac{X'}{X}$
0	1,000 0	1 000, 000	30,638 6	1,000	35	0,994 5	1 005, 530	30,725 9	1,003
5	0,999 2	1 000, 801	30,651 2	1,000	40	0,993 7	1 006, 340	30,738 6	1,003
10	0,998 4	1 001, 603	30,663 9	1,001	45	0,992 9	1 007, 151	30,751 4	1,004
15	0,997 6	1 002, 406	30,676 6	1,001	50	0,992 2	1 007, 861	30,762 5	1,004
20	0,996 9	1 003, 110	30,687 7	1,002	55	0,991 4	1 008, 675	30,775 1	1,005
25	0,996 1	1 003, 915	30,700 3	1,002	60	0,990 6	1 009, 489	30,788 2	1,005
30	0,995 3	1 004, 722	30,713 1	1,002					

Ainsi dans le cas où :

$$X = 87\,837^m$$

et

$$y_s = 37\,713^m$$

on a : $\frac{X'}{X} = 1,003$ et l'augmentation de portée est égale à : $265,5$.

§ 112. Variation de g avec la latitude.

Une dernière correction est à apporter aux coordonnées x, y, z d'un point de la trajectoire, si l'on veut tenir compte de la variation de la gravité avec la latitude et du fait que sa direction n'est pas exactement celle du rayon de la Terre.

En un point déterminé, il faut composer l'attraction terrestre qui passe par le centre de la Terre avec la force centrifuge qui s'exerce suivant le rayon du parallèle qui se rapporte au point considéré. En un point M de latitude φ , le rayon du parallèle est $R \cos \varphi$. Il fait avec le rayon de la

Terre l'angle φ (fig. 29). La force centrifuge est donc :

$$\frac{V^2}{R \cos \varphi} = \frac{\omega^2 R^2 \cos^2 \varphi}{R \cos \varphi} = R \omega^2 \cos \varphi, \quad (422)$$

et ses composantes suivant le rayon terrestre et la perpendiculaire à ce rayon dans le plan du méridien passant par ce point M, sont :

$$R \omega^2 \cos \varphi \cdot \cos \varphi = R \omega^2 \cos^2 \varphi,$$

et

$$R \omega^2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi;$$

g' étant l'attraction apparente et g l'attraction terrestre, on a :

$$g'^2 = (g - R \omega^2 \cos^2 \varphi)^2 + R^2 \omega^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi, \quad (423)$$

$$g'^2 = g^2 - 2gR \omega^2 \cos^2 \varphi + R^2 \omega^4 \cos^2 \varphi + R^2 \omega^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi,$$

et en négligeant le terme $R^2 \omega^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$

$$g'^2 = (g - R \omega^2 \cos^2 \varphi)^2,$$

$$g' = g - R \omega^2 \cos^2 \varphi. \quad (424)$$

d'où :

Si, d'autre part θ est l'angle des deux directions g' et g , nous avons, en projetant sur MT' et sur la perpendiculaire à MT' (fig. 30) :

$$g \cos \theta = g' = g - R \omega^2 \cos^2 \varphi,$$

et :

$$g \sin \theta = R \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi;$$

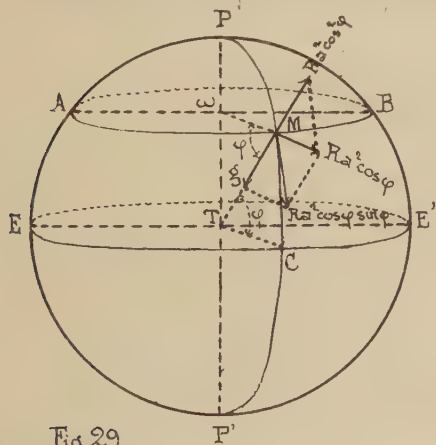
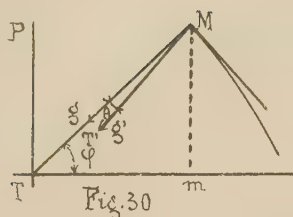


Fig. 29



ce qui donne :

$$\cos \theta = \frac{g - Ra^2 \cos^2 \varphi}{g}, \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{Ra^2 \cos \varphi \sin \varphi}{g};$$

ce que nous pouvons écrire :

$$\cos \theta = 1 - \frac{Ra^2}{g} \cos^2 \varphi, \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{Ra^2}{g} \sin 2\varphi; \quad (425)$$

donc, avec la même approximation :

$$\cos \theta = 1, \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{Ra^2}{2g} \sin 2\varphi \quad (426)$$

§ 118. Application 1^{re}) Supposons d'abord $\varphi = 45^\circ$; nous savons qu'au niveau de la

mer :

$$g = 9,80606, \quad \text{et que :} \quad \frac{Ra^2}{g} = \frac{1}{289};$$

nous obtenons dans ces conditions pour la nouvelle intensité de la pesanteur :

$$g' = 9,80606 - \frac{\cos 45}{289} = 9,80606 - \frac{1}{578} = 9,80606 - 0,00173 = 9,80433,$$

et

$$\theta = \frac{1}{578} \sin 90^\circ = \frac{1}{578}.$$

2^e) Au pôle, $\varphi = 90^\circ$, et au niveau de la mer. $g = 9,83109$,

alors :

$$g' = 9,83109 - Ra^2 \cos^2 90 = 9,83109, \quad g' = g.$$

et

$$\theta = 0^\circ$$

3^e) Enfin, à l'équateur, $\varphi = 0^\circ$ et au niveau de la mer : $g = 9,78103$,

par suite :

$$g' = 9,78103 - Ra^2 \cos^2 0^\circ = 9,78103 - 0,034 = 9,747,$$

et

$$\theta = \frac{Ra^2}{2g} \sin 0^\circ = 0^\circ$$

Cette déviation laisse évidemment la verticale dans le plan du méridien ; elle l'écarte de l'axe de la Terre. Cet écart qui est au plus de 6' entre les deux systèmes de coordonnées définis, l'un par la verticale vraie, l'autre par le prolongement du rayon terrestre, ne peut avoir d'influence sur la forme de la trajectoire.

C'est à l'équateur que la différence $g - g'$ est maximum. Pour $\varphi = 0^\circ$, on a : $g - g' = 0,034$

Dans ces conditions, si X' est la portée qui correspond à l'intensité g' de la gravité, X étant la portée qui correspond à l'intensité g ; on a :

$$X' = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{9,747}} - 1 \right),$$

et

$$X = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{9,781}} - 1 \right);$$

et par suite :

$$\frac{X'}{X} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{9,747}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{9,781}} - 1}.$$

Dans le cas extrême pour lequel :

$$4KV^4 = 10000,$$

on trouve :

$$\frac{X'}{X} = \frac{\sqrt{1 + \frac{10000}{9,747}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{10000}{9,781}} - 1} = \frac{31,046}{30,990} = 1,0018.$$

L'augmentation de portée à l'équateur ne surpasse pas :

$$\frac{2X}{1000} = \frac{X}{500}$$

c'est-à-dire $\frac{1}{500}$ de la portée. On peut donc négliger cette correction.À la latitude de 45° , on aurait :

$$\frac{X'}{X} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{9,804}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{9,806}} - 1},$$

et pour :

$$4KV^4 = 10000,$$

on aurait :

$$\frac{X'}{X} = \frac{\sqrt{1 - \frac{10000}{9,804}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{10000}{9,806}} - 1} = \frac{30,953}{30,949} = 1,0001,$$

ce qui montre bien qu'on peut ne pas tenir compte de cette correction.

§ 119. Correction due à la convergence des verticales. — Soient O l'origine de la trajectoire, T le centre de la Terre et M un point de la trajectoire (fig. 31). La gravité, dont pour le moment, nous supposons la valeur constante agit suivant la direction MT . Si θ est l'angle en T , cet angle étant toujours petit, puisque pour une portée de 100^{km} on a :

$$\theta = 0^\circ 53' 57''$$

nous pouvons supposer: $\cos \theta = 1$, et $\sin \theta = \tan \theta$.

Projetant successivement sur Ox et Oy , il vient:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -cF(w) \cos \psi - g \sin \theta, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -cF(w) \sin \psi - g \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (427)$$

ou sensiblement:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -cF(w) \cos \psi - g \tan \theta, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -cF(w) \sin \psi - g, \end{aligned} \right\} \quad (428)$$

mais si R est le rayon de la Terre: $OQ = OT \tan \theta = R \tan \theta$,

$$\tan \theta = \frac{OQ}{R}, \quad \text{ou sensiblement:} \quad \tan \theta = \frac{x}{R};$$

nous en déduisons

de sorte que nous avons les équations différentielles:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -cF(w) \cos \psi - \frac{g}{R} x, \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -cF(w) \sin \psi - g, \quad (429)$$

et, comme nous l'avons déjà montré au § 21, nous pouvons écrire:

$$\left. \begin{aligned} g \frac{d(w \cos \psi)}{w d\psi} &= cF(w) + \frac{gx}{R \cos \psi} \left[1 + \frac{cF(w)}{g} \sin \psi \right], \\ w \frac{d\psi}{dt} &= -g \left[1 - \frac{x}{R} \tan \psi \right] \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (430)$$

§ 120. Application au cas du vide. — La première des équations (429) devient:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{R} x \quad (431)$$

dont l'intégrale générale est:

$$x = A \cos \sqrt{\frac{g}{R}} t + B \sin \sqrt{\frac{g}{R}} t, \quad (432)$$

qui donne en différentiant:

$$\frac{dx}{dt} = -A \sqrt{\frac{g}{R}} \sin \sqrt{\frac{g}{R}} t + B \sqrt{\frac{g}{R}} \cos \sqrt{\frac{g}{R}} t;$$

et comme pour $t=0$, on a:

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \alpha,$$

on en déduit:

$$V \cos \alpha = B \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

De plus, pour $t=0$, on a: $x=0$, alors

$$0 = A \cos \sqrt{\frac{g}{R}} t;$$

les constantes A et B ont donc pour valeurs:

$$A=0,$$

et

$$B = V \cos \alpha \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

et finalement l'intégrale générale est:

$$x = V \cos \alpha \sqrt{\frac{R}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{R}} t. \quad (433)$$

En développant $\sin \sqrt{\frac{g}{R}} t$ en série, on trouve:

$$\sin \sqrt{\frac{g}{R}} t = \sqrt{\frac{g}{R}} t - \frac{\sqrt{\frac{g^3}{R^3}} t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\sqrt{\frac{g^5}{R^5}} t^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots,$$

en négligeant les termes de ce développement à partir du troisième, attendu que $\frac{g}{R} t^2$ est déjà très petit, on a:

$$x = V \cos \alpha \sqrt{\frac{R}{g}} \left[\sqrt{\frac{g}{R}} t - \left(\frac{\sqrt{\frac{g}{R}}}{6} \right) \frac{t^3}{6} \right],$$

ou encore:

$$x = V \cos \alpha t - \frac{1}{6} V \cos \alpha \cdot \frac{g}{R} t^3, \quad (434)$$

en portant dans la formule qui donne y ;

$$y = V \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (435)$$

la valeur de t , tirée de l'équation (434), on obtient l'équation de la trajectoire. Au lieu d'éliminer t entre les équations (434) et (435), remplaçons t par sa valeur approchée:

$$t = \frac{x}{V \cos \alpha}$$

dans le dernier terme de (434), nous obtenons ainsi:

$$x = V \cos \alpha t - \frac{1}{6} \cdot \frac{g}{R} \cdot \frac{x^3}{V^3 \cos^3 \alpha} V \cos \alpha;$$

d'où nous tirons:
$$V \cos \alpha t = x + \frac{1}{6} \cdot \frac{g}{R} \cdot \frac{x^3}{V^3 \cos^3 \alpha} = x \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{g}{R} \cdot \frac{x^2}{V^2 \cos^3 \alpha} \right),$$

puis

$$t = \frac{x}{V \cos \alpha} \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{g}{R} \cdot \frac{x^2}{V^2 \cos^3 \alpha} \right)$$

et nous remplaçons t par cette dernière valeur dans l'équation (435), ce qui donne:

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos^2 \alpha} + \frac{1}{6} \cdot \frac{g x^3}{R V^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} \quad (436)$$

Si dans cette équation (436), nous faisons $y = 0$, après suppression de la solution $x = 0$, qui correspond à l'origine, nous obtenons une équation du second degré en x , qui mise sous forme entière peut s'écrire:

$$g \sin \alpha x^2 - 3g R \cos \alpha x + 6 R V^2 \sin \alpha \cos^3 \alpha = 0 \quad (437)$$

Telle est l'équation des Portées obtenue, dans ce cas, en négligeant dans le développement de $\sin \sqrt{\frac{g}{R}} t$ tous les termes à partir du troisième. Cette équation est d'ailleurs donnée dans divers traités de Balistique. La condition de réalité des racines de cette équation est:

$$9g^2 R^2 \cos^2 \alpha - 24g R V^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \geq 0, \text{ ou: } 3g R - 8V^2 \sin^2 \alpha \geq 0,$$

laquelle est toujours remplie dans les conditions du problème qui nous occupe.

Les deux racines sont positives, la plus petite étant la seule qui convienne. Nous savons que dans le vide, quand on ne tient pas compte de la convergence des verticales la portée X est donnée par la formule:

$$X = \frac{2V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g}$$

substituons cette valeur dans (437), nous trouvons:

$$g \sin \alpha \frac{4V^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2} - \frac{6g R V^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{g} + 6 R V^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha = \frac{4V^4}{g} \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha > 0,$$

le résultat étant positif, cette valeur X est extérieure aux racines de (437); or la demi-somme de ces racines est:

$$\frac{3g R \cos \alpha}{2g \sin \alpha} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

et comme: $\frac{2V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} < \frac{3}{2} \cdot \frac{R \cos \alpha}{\sin \alpha}$, car en général: $4V^2 \sin^2 \alpha < 3g R \cos \alpha$

il en résulte que les deux racines de (437) sont supérieures à X . Du reste, si nous supposons: $\alpha = 45^\circ$ et $V = 1000^m$, au lieu de trouver, comme au § 13:

$$X = 101950^m,$$

nous trouvons:

$$X_1 = 102497^m;$$

d'où une augmentation de portée:

$$X_1 - X = 102497^m - 101950^m = 547^m$$

Or ce résultat est contraire à ce que nous aurions pu prévoir car la convergence des verticales a pour effet de porter moins loin le projectile.

L'erreur provient des termes négligés dans le développement de $\sin \sqrt{\frac{g}{R}} t$, il aurait fallu prendre le terme en t^5 .

Considérons l'équation complète:

$$x = V \cos \alpha \sqrt{\frac{R}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{R}} t, \quad \text{et} \quad V = 1000^m,$$

et supposons, comme précédemment: $\alpha = 45^\circ$,

de plus, soient $g = 9,81$ et $R = 6371000^m$

il en résulte: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{R}{g} = 649439$, $\sqrt{\frac{R}{g}} = 806$ et $\sqrt{\frac{g}{R}} = 0,00124$.

puis: $V \cos \alpha = 1000 \times \frac{1,414}{2} = 707$ et: $X = 707 \times 806 \sin 0,00124 t = 569842 \sin 0,00124 t$.

D'après le tableau du § 13, nous pouvons prendre: $t = 144,2$

alors $0,00124 t = 0,00124 \times 144,2 = 0,178808$ radians

et $\sin 0,178808^r = \sin \frac{180}{\pi} \times 0,178808 = \sin 180 \times 0,31831 \times 0,178808 = \sin 10,24462 = \sin 10^\circ 14' = 0,17766$

Chapitre XII.

De la Dérivation.

§ 123. Généralités — Quand un projectile décrit sa trajectoire, il ne tarde pas à se présenter plus ou moins obliquement à la résistance de l'air. La ligne d'action de cette résistance cesse alors de coïncider avec l'axe de figure. La dérivation moyenne est la quantité dont, au point de chute, les projectiles s'écartent du plan de projection. Elle se manifeste toujours du côté vers lequel tourne la partie supérieure du corps, à gauche par conséquent pour les canons rayés de droite à gauche.

Lorsque la nature du projectile est connue, la dérivation, de même que la portée est déterminée par l'angle de projection α et la vitesse initiale V . On peut donc écrire : $D = f(\alpha, V)$. (438)

Toutes les considérations théoriques dont la dérivation a été l'objet n'ont pas encore réussi à donner à la fonction f une forme analytique facile à calculer; mais à l'aide d'expériences nombreuses on est quelque peu parvenu à lui déterminer une forme pratique. Les dérivation subissant l'influence des agitations de l'atmosphère et de la rotation de la Terre sont extrêmement variables surtout pour les très longues portées. Les dérivation des projectiles de la marine augmentent quand le vent vient de la droite, elles décroissent quand vient de la gauche. Le contraire se produit lorsque les rayures des canons tournent de gauche à droite.

§ 124. Formule d'Hélie — Pour mémoire, nous rappelons la formule d'Hélie qui a été établie expérimentalement :

$$D = \Gamma V^2 \sin^2 \alpha, \quad (439)$$

dans laquelle :

$$\Gamma = 550 \frac{a^3}{p} \operatorname{tg} \theta \sin \gamma, \quad (440)$$

θ étant l'inclinaison finale des rayures du canon ; en général :

$$\theta = 7^\circ$$

et γ étant le demi angle ogival du projectile.

Par suite :

$$D = 550 V^2 \sin^2 \alpha \frac{a^3}{p} \operatorname{tg} \theta \sin \gamma. \quad (441)$$

Nous pouvons donner une autre forme à cette expression de la dérivation D . Nous savons, en effet, que la quantité $\lambda \frac{a^3}{p} \sin \gamma$, appelée paramètre de forme du projectile remplace avantageusement la quantité $\frac{a^3}{p} \sin \gamma$. Si donc, nous posons :

$$\lambda \frac{a^3}{p} \sin \gamma = \Lambda,$$

nous pouvons écrire :

$$D = 550 \Lambda V^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \theta. \quad (442)$$

Dans mon Traité de Balistique graphique la formule (441) a été mise sous forme d'abaque.

§ 125. Phénomène de Magnus — Soit AOB un élément plan animé dans l'air d'une vitesse w , représentée par le vecteur Ow (fig. 32), qui ne coïncide pas avec la normale ON à cet élément. Cette vitesse

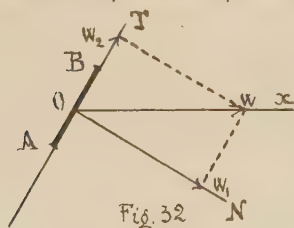


Fig. 32

peut être décomposée en deux autres, l'une $Ow_1 = w_1$, normale à l'élément de surface, l'autre $Ow_2 = w_2$ tangentielle. La résistance due à la vitesse w est une certaine fonction des résistances dues séparément aux résistances w_1 et w_2 .

Les auteurs qui ont soumis cette importante question au calcul supposent que la résistance due à w_2 est négligeable vis à vis celle due à w_1 . Mais rien ne justifie pleinement cette manière de voir, et comme l'état actuel de la théorie des mouvements des fluides ne permet pas d'aborder l'étude complète du problème, même dans le cas où la vitesse w est très faible; il n'y a qu'à restreindre l'étude balistique au seul cas pour lequel l'angle de la vitesse et de l'axe du projectile est toujours très faible, ce qu'on cherche d'ailleurs à réaliser dans la pratique.

Négligeant la seconde résistance devant la première, on admet que la résistance sur un élément plan due à la vitesse oblique w est la même que la résistance due à la vitesse normale w_1 . Cette-ci consiste en

une pression normale, et on admet qu'elle est proportionnelle à une certaine puissance de la vitesse.

Ainsi définies la grandeur et la direction de la résistance sur un élément de surface, on en déduit la résistance totale sur un projectile en mouvement par le calcul intégral pour définir à un instant donné cette résistance totale, il suffit de donner à cet instant les vitesses de tous les éléments de la surface, c'est-à-dire le mouvement du projectile à cet instant.

§ 126. Résistance sur un projectile. — On peut distinguer trois cas suivant que le mouvement élémentaire se réduit à une simple translation ou à une translation accompagnée de rotation autour de l'axe de figure ou enfin à une translation accompagnée de rotation autour d'un axe quelconque.

1^{er} Cas — On peut dire a priori sans faire aucune hypothèse que le plan M mené par l'axe de figure parallèlement à la translation est un plan méridien par rapport auquel les actions de l'air sont symétriques deux à deux. Ces actions ont donc une résultante contenue dans ce plan appelé plan de résistance. La ligne d'action de cette résultante rencontre l'axe de figure en un certain point nommé centre de résistance. Partant de l'hypothèse précédente, on peut déterminer par le calcul la position de cette ligne d'action et l'intensité correspondante de la résistance de l'air.

2^e Cas — Le plan méridien M qui contient la vitesse du centre de gravité divise le projectile en deux parties dont les éléments ds, ds' se correspondent symétriquement de part et d'autre de ce plan. Mais on ne peut plus dire a priori, sans faire aucune hypothèse que les résistances de l'air sur ces deux éléments soient égales. Le sens de la rotation établit en effet une dyssymétrie du mouvement par rapport au plan M , car les vitesses totales des deux éléments ds, ds' sont respectivement les résultantes d'une même vitesse de translation parallèle au plan MM et de deux vitesses de rotation qui ne sont pas représentées

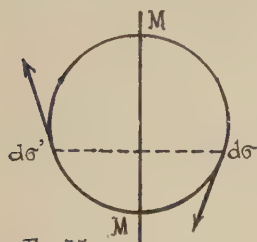


Fig. 33

par deux segments symétriques (fig. 33). Rien n'indique a priori que toutes les résistances élémentaires se réduisent dans ce cas, à une résultante unique, et en supposant même que cette résultante existe, rien ne prouve qu'elle soit située dans le plan MM . Cette dyssymétrie fait même comprendre qu'il ne peut en être ainsi et qu'il doit y avoir une résultante partielle perpendiculaire au plan MM . C'est ce qu'ont, du reste, démontré les expériences faites en 1852 par Magnus.

Prenons le plan MM pour plan de la figure OAw . Soient (fig. 34) OA , l'axe du projectile, Ow la vitesse du centre de gravité O , ds et ds' deux éléments pris sur un parallèle PQ . Si l'on estime les vitesses latérales de ces éléments parallèlement à Ow , la rotation augmente les vitesses des

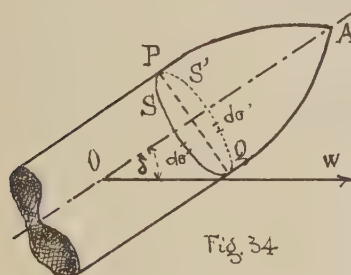


Fig. 34

points situés d'un côté du plan AOW , et diminue celle des points situés de l'autre côté. L'air s'écoule de part et d'autre du plan MM avec une vitesse plus grande d'un côté que de l'autre.

Magnus a démontré que si un courant d'air vient frapper un projectile en repos, la pression exercée sur les deux côtés du projectile est moindre que si l'air était en repos; mais les pressions sont les mêmes des deux côtés; tandis que si le projectile tourne, la pression est moindre du côté où l'air se meut dans le même sens que la surface du projectile et plus grande de l'autre côté où le mouvement de rotation ne s'accorde pas avec le mouvement de translation.

Quand l'angle δ de l'axe de figure et de la vitesse w reste très petit la dyssymétrie cesse d'exister et le phénomène de Magnus n'a pas d'influence sensible.

3^e Cas — L'axe OR ne coïncidant plus avec l'axe de figure OA , ce dernier décrit un élément de surface conique autour de OR . Dans ce cas, la vitesse de translation Ow n'est plus seule à fournir, comme dans les cas précédents, une composante suivant la normale en chaque élément (fig. 35). Il est clair que le mouvement conique du projectile donne également de son côté une telle composante. Mais si l'angle AOR est très petit cette composante peut être négligée et on peut calculer approximativement la résistance comme si

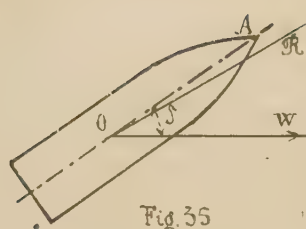


Fig. 35

L'axe de rotation coïncidait avec l'axe de figure et les résistances élémentaires sont les mêmes dans ce troisième cas et dans le deuxième cas.

En résumé, toutes ces approximations faites, on voit que : Le plan du méridien qui contient la vitesse du projectile (plan de résistance) contient aussi la résultante des actions de l'air sur ce projectile. Cette résultante est sensiblement la même que si le projectile ne tournait pas.

Moyennant ces approximations, le calcul permet de déterminer la résultante en question. Voici les résultats généraux auxquels on parvient, l'angle δ de l'axe de figure et de la tangente à la trajectoire étant très petit (fig. 36)

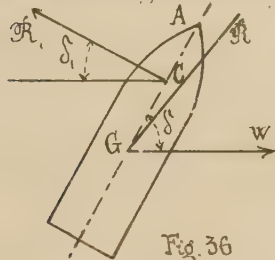


Fig. 36

1°. Le centre de résistance C peut être considéré comme fixe pour un projectile donné, sa position dépendant de la forme de l'ogive et nullement de la partie cylindrique. Le centre de résistance C est en avant du centre de gravité G .

2°. La résultante des actions de l'air n'est pas parallèle à la vitesse du centre de gravité; mais elle a une composante R_t perpendiculaire à cette vitesse et dirigée par rapport à celle-ci du même côté que la pointe du projectile.

De plus, l'angle δ_1 de la résultante avec la vitesse en question est proportionnel à l'angle δ de cette vitesse avec l'axe, tant que celui-ci reste petit. On peut alors écrire :

$$\delta_1 = k \delta \quad (443)$$

3°. La grandeur de la résultante est sensiblement indépendante de l'angle δ pour de petites valeurs de cet angle; elle est la même que pour :

$$\delta = 0$$

Sa valeur est donc égale à celle mesurée par l'expérience dans le cas d'un mouvement suivant l'axe. De plus, comme l'angle δ_1 reste toujours très petit, il n'y a pas de différence sensible comme intensité entre cette résultante et sa projection sur la direction du mouvement.

En résumé : On voit que la résistance de l'air sur un projectile oblong cesse d'être tangentielle dès que la direction du mouvement devient oblique à l'axe du projectile. L'obliquité fait naître une résistance partielle normale à la trajectoire, comprise dans le plan de la résistance et dirigée du même côté que la pointe du projectile. Elle fait naître aussi un couple autour du centre de gravité et le plan de ce couple n'est autre que le plan de résistance. Cette force et ce couple qui viennent s'ajouter à la résistance tangentielle sont proportionnels à l'obliquité δ .

§ 127. Forces qui sollicitent un projectile le long de sa trajectoire — Considérons un projectile sur sa trajectoire dans une position telle que son axe de figure GA s'écarte peu de la tangente GT . Soient C le centre de résistance, d sa distance au centre de gravité. Soient enfin R_t et R_n les deux composantes de la résistance R suivant la tangente et la normale contenue dans le plan de résistance AGT . On a évidemment (fig. 37) :

$$R_t = R \cos \delta_1 \quad \text{et} \quad R_n = R \sin \delta_1 \quad (444)$$

ou en remplaçant $\cos \delta_1$ et $\sin \delta_1$ par leurs développements en séries :

$$R_t = R \left(1 - \frac{\delta_1^2}{1 \cdot 2} + \frac{\delta_1^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\delta_1^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \right),$$

et

$$R_n = R \left(\delta_1 - \frac{\delta_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\delta_1^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right),$$

Fig. 37

comme l'angle δ_1 est généralement très petit, on peut supprimer les termes qui suivent le premier, et il vient alors :

$$R_t = R, \quad \text{et} \quad R_n = R \delta_1 = R k \delta \quad (445)$$

La force R appliquée au centre de résistance, équivaut à l'ensemble de ces deux forces R_t et R_n appliquées au centre de gravité G et d'un couple γ autour de ce dernier centre. Le bras de levier l de ce couple, distance du point G au vecteur CR est égal à :

$$l = d \sin (\delta + \delta_1),$$

ou simplement :

$$l = d (\delta + \delta_1),$$

et puis que :

$$\delta_1 = k \delta,$$

on peut écrire :

$$l = d \delta (1 + k), \quad (446)$$

et par suite :

$$\gamma = Rl = R d \delta (1+k). \quad (447)$$

Mais nous avons dit précédemment qu'on pouvait considérer la quantité $d(1+k)$ comme constante. Posons alors :

$$d(1+k) = h, \quad \gamma = R \cdot h \cdot \delta. \quad (448)$$

Nous voyons que dans le tir, quel qu'il soit, le projectile est soumis aux forces suivantes : 1° son poids p , 2° la résistance tangentielle $R_t = R$, 3° la résistance normale $R_n = R k \delta$, 4° le couple $\gamma = R \cdot h \cdot \delta$. Nous pouvons considérer les deux premières actions comme des actions principales et les deux autres comme des actions perturbatrices.

§ 128. Dérivation — Si le projectile était soumis uniquement à l'action des deux forces principales : pesanteur et résistance tangentielle, il ne sortirait pas du plan de projection, et la trajectoire se projetterait horizontalement suivant la trace Ox de ce plan (fig. 38). Or l'expérience prouve que la projection horizontale de la trajectoire est une certaine courbe OCD , tangente à l'origine au plan de projection Ox , mais qui s'en écarte progressivement de plus en plus. En particulier, le point de chute C se trouve d'autant plus écarté de Ox que la portée OC est plus grande.

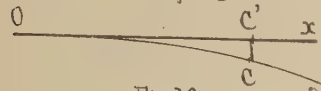


Fig 38

On appelle Dérivation théorique, la distance CC' du point de chute au plan de projection. La Dérivation proprement dite est la distance du même point de chute au plan vertical de tir.

La dérive est toujours de même sens que la rotation du projectile ; cette règle doit être entendue de la manière suivante : Si pour le pointeur le mouvement du culot du projectile paraît de même sens que celui des aiguilles d'une montre on dit que le projectile tourne à droite ; la dérive porte alors le projectile à droite du plan de tir. Dans le cas contraire, la dérive est à gauche.

La dérive est toujours petite par rapport à la portée ; mais non négligeable.

§ 129. Effet du couple perturbateur — Tel est, d'après l'expérience, l'effet principal des actions perturbatrices R_n et γ . Indiquons maintenant quelle est la part de chacune d'elles dans l'ensemble du phénomène. Le couple perturbateur ne peut avoir aucune influence directe sur le centre de gravité. Mais ce couple déplace l'axe du projectile par rapport à la direction de la tangente de la même façon que le couple de la pesanteur déplace l'axe d'une toupie par rapport à la verticale. Dans ces deux phénomènes, le centre de gravité du projectile, d'une part, et la pointe de la toupie, d'autre part, jouent un rôle analogue : celui d'un point fixe que le couple ne peut déplacer. Pendant la rotation de la toupie, le couple de la pesanteur déplace lentement l'axe de la toupie, en maintenant à peu près invariable l'inclinaison de cet axe sur la verticale, tandis qu'il aurait pour effet d'augmenter très rapidement cette inclinaison et de renverser la toupie, si celle-ci ne tournait pas. Pareillement le couple γ déplace lentement l'axe du projectile autour de la tangente à la trajectoire pendant que celle-ci s'incline de plus en plus sur l'horizon. En vertu de ce déplacement, l'axe au lieu de rester parallèle à sa direction initiale ; ce qui aurait lieu si la résistance de l'air passait au centre de gravité, s'accompagne de très près la tangente dans son mouvement et s'incline avec elle de plus en plus sur l'horizon.

C'est donc grâce à l'action du couple perturbateur que l'obus se présente sans cesse à la résistance de l'air à peu près par sa pointe, c'est-à-dire par sa surface minimum, et qu'il peut être lancé à de grandes distances.

L'action du couple γ est par conséquent très utile ; mais c'est à la condition que le projectile, comme la toupie, possède d'avance une rotation considérable autour de son axe de figure. Les rayures du canon sont précisément destinées à lui imprimer cette rotation sans laquelle le couple perturbateur ferait pirouetter le projectile autour d'une perpendiculaire au plan de projection.

§ 130. Effet de la force perturbatrice — Dans ce mouvement de l'axe de figure, la pointe du projectile reste sans cesse du même côté du plan vertical contenant la tangente, savoir à droite ou à gauche, suivant que le projectile tourne à droite ou à gauche. Or on sait que la force perturbatrice R_n est toujours : 1° perpendiculaire à la tangente, 2° contenue dans le plan de cette tangente et de la pointe, 3° dirigée du même côté que la pointe.

On conçoit donc que cette force perturbatrice éloigne continuellement le projectile du plan de projection précisément dans le sens de la déviation observée.

C'est ainsi que par la séparation des effets des actions perturbatrices, on peut expliquer sommairement le phénomène de la Dérivation.

§ 131. Précession — Au moment où un projectile quitte le canon, la tangente à la trajectoire du centre de gravité coïncidant avec l'axe de figure, la résistance de l'air a la même direction que ces deux droites et elle n'exerce aucune influence sur la rotation dont ce corps est animé. Mais la tangente GT (fig. 39), s'abaissant d'une façon continue sous l'action de la pesanteur, se sépare bientôt de l'axe de figure GA qui tend au contraire, en vertu du mouvement de rotation que possède le projectile à rester parallèle à lui-même, et la résistance de l'air, toujours contenue dans le plan de ces deux droites prend une direction RE oblique à chacune d'elles, le point C où elle rencontre l'axe de figure étant d'ailleurs situé entre la pointe A du projectile et le centre de gravité G.

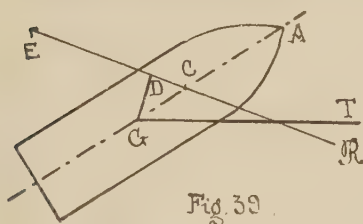


Fig. 39

Dans ces conditions, la résistance de l'air tend à renverser le projectile en le faisant tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan AGT. Mais en raison de la rotation initiale que le corps a prise en suivant les rayures, cet effet ne se produit pas : seulement, l'axe de figure se déplace à chaque instant normalement au plan AGT, en sorte qu'il décrirait un cône droit autour de la tangente GT si celle-ci au lieu de s'infléchir progressivement conservait une direction invariable.

On peut donc dire que la rotation initiale dont un projectile est animé autour de son axe de figure a pour effets : 1° d'augmenter la stabilité du projectile en atténuant l'action perturbatrice de la résistance de l'air qui tend à renverser le corps, 2° de ramener constamment l'axe de figure dans le voisinage de la tangente, en imprimant à la première de ces deux droites un mouvement de rotation autour de la seconde.

Par analogie avec le mouvement conique de l'axe de la Terre autour de l'axe de l'écliptique, on a donné le nom de Précession à cette rotation de l'axe de figure autour de la tangente.

Le plan AGT tournant avec l'axe de figure autour de la tangente GT, la résistance de l'air GR qu'il contient ne tarde pas à faire un angle avec le plan de tir, et, à partir de ce moment, elle fournit une composante qui a pour effet de faire sortir la trajectoire de ce dernier plan : le déplacement latéral qui en résulte pour le centre de gravité du projectile constitue la Dérivation.

§ 132. Flutation — Comme dans le mouvement de la toupie, on peut aussi avoir un aperçu du mouvement de l'axe de figure par rapport à l'axe résultant des quantités de mouvement, car on sait que : Quand un corps est soumis à l'action de forces quelconques, l'axe instantané de rotation de ce corps, est à chaque instant, le diamètre conjugué du plan tangent perpendiculaire à l'axe du moment résultant des moments des quantités de mouvement.

Donc pour un corps dont l'ellipsoïde central est de révolution, l'axe de figure, l'axe instantané de rotation et l'axe du moment résultant des quantités de mouvement sont toujours dans un même plan.

Dans le problème de la toupie, on démontre que l'axe de figure est animé d'un mouvement de balancement autour de l'axe résultant des moments des quantités de mouvement lequel a reçu

le nom de Nutation par analogie avec le balancement de l'axe de la Terre autour de sa position moyenne.

De l'existence de la nutation, il résulte que l'axe de figure GA d'un projectile au lieu de décrire comme l'axe résultant un cône droit autour de la tangente GT supposée immobile prend en réalité un mouvement épicycloïdal autour de cette dernière droite.

§ 133. Résumé — L'étude analytique de la précession et de la nutation des projectiles est très complexe; elle a été entreprise par plusieurs statisticiens. Signalons tout particulièrement les travaux de M. Charbonnier.

Cette étude montre que, où déjà pour obtenir une valeur approchée de la précession on est obligé de faire appel à des simplifications et des hypothèses nombreuses, il paraît illusoire de chercher à calculer l'effet de la nutation sur le mouvement d'un projectile.

§ 134. Influence du vent atmosphérique. — A la question de la Dérivation nous pourrions rattacher celle de l'effet du vent atmosphérique sur les éléments de tir d'un projectile. On conçoit aisément que le vent provoque un certain déplacement du point de chute. Dans le tir de plein fouet, on peut à la rigueur faire usage des formules indiquées dans tous les cours d'artillerie. Mais lorsqu'il s'agit de tirs à très longues portées il ne faut pas songer à l'emploi de ces formules et la question du régime des vents dans les hautes couches de l'atmosphère nous étant complètement inconnue, nous n'avons pas entrepris cette étude.

Chapitre XX.

De la Variation des Éléments du Tir.

§ 135. Variation de la Portée. — Étudions d'abord la variation de la Portée qui est la plus importante et dont dépendent la plupart des autres. Nous savons que la formule des portées est :

$$X = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha} - 1 \right),$$

1°. Voyons comment varie X quand V seul varie, K étant alors supposé constant. Prenons la dérivée de X par rapport à V, nous trouvons :

$$\frac{\partial X}{\partial V} = \left(\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha} - 1 \right) \times \left(\frac{-4KV^3}{4K^2V^2} \right) - \frac{1}{2KV^2} \times \frac{\frac{16KV^3}{g} \sin 2\alpha}{2\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha}},$$

ou successivement :

$$\frac{\partial X}{\partial V} = - \frac{\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha} - 1}{KV^3} + \frac{4V \sin 2\alpha}{g \sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha}},$$

$$\frac{\partial X}{\partial V} = \frac{-g \left(1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha \right) + g \sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha} + 4KV^4 \sin 2\alpha}{KV^3 g \sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha}},$$

et en simplifiant :

$$\frac{\partial X}{\partial V} = \frac{-g + g \sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha}}{KV^3 g \sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha} - 1}{KV^3 g \sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha}}. \quad (449)$$

Or: $\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha} - 1 > 0$, donc: $\frac{\partial X}{\partial V} > 0$.
 La portée X croît quand la vitesse initiale V croît pour un angle de projection α donné.
 En particulier, pour: $\alpha = 45^\circ$, on a: $\sin 2\alpha = 1$

et

$$\frac{\partial X}{\partial V} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g}} - 1}{KV^3 \sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g}}} = \frac{\sqrt{1 + \rho} - 1}{KV^3 \sqrt{1 + \rho}},$$

en posant:

$$\frac{4KV^4}{g} = \rho$$

par suite:

$$\frac{\partial X}{\partial V} = \frac{(\sqrt{1+\rho}-1)\sqrt{1-\rho}}{KV^3(1+\rho)} = \frac{1+\rho-\sqrt{1+\rho}}{KV^3(1+\rho)} = \frac{1+\rho-(1+\rho)^{\frac{1}{2}}}{KV^3(1+\rho)},$$

mais

$$(1+\rho)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\rho}{2} - \frac{1}{8}\rho^2 + \frac{1}{16}\rho^3 - \dots$$

donc:

$$\frac{\partial X}{\partial V} = \frac{1+\rho-1-\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{8}\rho^2-\frac{1}{16}\rho^3+\dots}{KV^3(1+\rho)} = \frac{-\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{8}\rho^2-\frac{1}{16}\rho^3+\dots}{KV^3(1+\rho)} = \frac{\rho}{2KV^3} \left(1 - \frac{3}{4}\rho + \frac{5}{8}\rho^2 - \dots\right).$$

Lorsque ρ est très petit, on peut négliger les termes qui suivent le premier dans la parenthèse et écrire

$$\frac{\partial X}{\partial V} = \frac{\rho}{2KV^3}, \quad \text{ou encore:} \quad \frac{\partial X}{\partial V} = \frac{4KV^4}{2gKV^3} = 2V. \quad (450)$$

2°. Nous avons vu que X passe par un maximum X_m quand α varie seul; et nous avons montré que cet angle de portée maximum pouvait être considéré, pour tous les cas, comme égal à: $\alpha_m = 51^\circ 50'$

3°. Supposons maintenant que K soit seul variable. Calculons $\frac{\partial X}{\partial K}$, nous trouvons:

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \left(\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha} - 1 \right) \times \left(\frac{-1}{2K^2V^2} \right) - \frac{1}{2KV^2} \times \frac{\frac{4V^4}{g} \sin 2\alpha}{2\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha}} = \frac{1}{2KV^2} - \frac{\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha}}{2K^2V^2} - \frac{V^2 \sin 2\alpha}{Kg \sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha}},$$

ou

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \frac{g\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha} - g(1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha) + 2KV^4 \sin 2\alpha}{2K^2V^2 g \sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha}},$$

ce qui donne:

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \frac{g\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha} - g - 2KV^4 \sin 2\alpha}{2K^2V^2 g \sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha}}. \quad (451)$$

Le dénominateur est positif; montrons que le numérateur est négatif, c'est-à-dire que:

$$g\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha} < g + 2KV^4 \sin 2\alpha,$$

ou, en élevant au carré:

$$g^2 \left(1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha \right) < (g + 2KV^4 \sin 2\alpha)^2,$$

ou encore:

$$g^2 + 4KV^4 g \sin 2\alpha < g^2 + 4KV^4 g \sin 2\alpha + 4K^2V^8 \sin^2 2\alpha,$$

ce qui est vrai, attendu que:

$$4K^2V^8 \sin^2 2\alpha > 0.$$

Donc, la portée X croît, quand K décroît. Or K est proportionnel à a^2 , donc K croît et par suite X décroît quand le calibre a augmente.

K est proportionnel au paramètre de forme:

$$\Lambda = \lambda \frac{a^2}{p} \sin \gamma,$$

donc K croît et par suite X décroît quand le paramètre de forme Λ croît.

K est inversement proportionnel à p , donc K décroît et par suite X croît quand le poids du projectile p augmente.

K décroît quand la vitesse initiale V croît, donc la portée augmente quand la vitesse initiale V croît.

Quand la fonction Ξ croît, c'est-à-dire quand l'altitude du lieu d'expérience décroît ou encore quand la latitude de ce lieu croît, K croît et par suite la portée X diminue.

Enfin, quand la fonction Ψ croît, K croît et la portée X diminue.

En résumé, toutes choses étant égales d'ailleurs, la portée X croît lorsque :

- 1° la vitesse initiale V croît ; 2° le poids p du projectile croît ; 3° l'altitude z du lieu d'expérience croît ; 4° le calibre a du canon décroît ; 5° le paramètre de forme Λ du projectile décroît ; 6° la latitude φ du lieu d'expérience décroît.

§ 136. Variation de l'angle de chute. — Nous savons que :

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \alpha \left(1 + \frac{S}{1+S} \right),$$

dans laquelle

$$KV^2X = S,$$

et nous voyons que S croît quand K , V et X croissent.

Étudions la variation de la fonction :

$$1 + \frac{S}{1+S} = \frac{1+2S}{1+S} = \Omega,$$

considérons sa dérivée $\frac{\partial \Omega}{\partial S}$, nous trouvons :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial S} = \frac{2(1+S) - (1+2S)}{(1+S)^2} = \frac{1}{(1+S)^2}, \quad (452)$$

elle est toujours positive. La fonction Ω croît quand S croît.

Pour un même angle de projection α , l'angle de chute ω croît, quand :

- 1° la vitesse initiale V croît ; 2° le calibre a du canon croît ; 3° le poids p du projectile décroît ; 4° l'altitude z du lieu d'expérience décroît ; 5° la latitude φ de ce lieu croît.

Remarquons qu'en ce qui concerne la vitesse initiale V , notre conclusion peut ne pas être exacte, car K étant fonction de V ne peut être traitée comme une constante. Le calcul pratique des tables de tir montre au contraire que pour un angle de projection déterminé, l'angle de chute décroît, mais très lentement, quand la vitesse initiale croît.

§ 137. Variation de la durée totale de trajet. — Nous savons que la durée totale de trajet est donnée par la formule :

$$T = \Phi \sqrt{X \operatorname{tg} \alpha},$$

dans laquelle :

$$\Phi = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+S}},$$

Pour un même angle de projection α , la durée totale de trajet croît, quand :

- 1° le calibre a du canon décroît ; 2° le poids p du projectile croît ; 3° la vitesse initiale V croît ; 4° la latitude φ du lieu d'expérience décroît ; 5° l'altitude z de ce lieu croît ; 6° la portée X croît.

§ 138. Variation de la vitesse restante tangentielle. — La vitesse restante tangentielle est donnée par la formule :

$$v = V \Upsilon \frac{\cos \alpha}{\cos \omega},$$

dans laquelle :

$$\Upsilon = \frac{1}{\sqrt{1+3S}}.$$

Toutes choses égales d'ailleurs, pour un même angle de projection α , la vitesse restante tangentielle croît quand :

- 1° le calibre a du canon décroît ; 2° le poids p du projectile croît ; 3° la vitesse initiale V croît ; 4° la latitude φ du lieu d'expérience décroît ; 5° l'altitude z de ce lieu croît ; 6° la portée X augmente.

§ 139. Variation de la flèche de la trajectoire. — Nous savons que la flèche de la trajectoire est donnée par la formule :

$$y_s = X \Sigma \operatorname{tg} \alpha,$$

dans laquelle :

$$\Sigma = \frac{495^3 + 985^3 + 685 + 16}{1265^3 + 5005^3 + 2405 + 64}$$

Toutes choses égales d'ailleurs, pour un même angle α de projection, la flèche Y_s de la trajectoire croît quand : 1° le calibre a du canon décroît ; 2° le poids p du projectile croît ; 3° la vitesse initiale V croît ; 4° la latitude φ du lieu d'expérience décroît ; 5° l'altitude z de ce lieu croît ; 6° quand la portée X croît.

§ 140. Résumé. — Il résulte de tout ce qui précède que, pour un angle de projection α déterminé, toutes choses étant égales d'ailleurs, la portée X , la durée totale de trajet T , la vitesse restante tangentielle au point de chute v , l'énergie cinétique du projectile en ce point E et la flèche Y_s de la trajectoire croissent quand :

1° le calibre a du canon décroît ; 2° le poids p du projectile croît ; 3° la vitesse initiale V croît ; 4° l'altitude z du lieu d'expérience croît ; 5° la latitude φ de ce lieu décroît.

Pour l'angle de chute ω , les conclusions sont contraires aux précédentes, cet angle ω décroît quand a et φ décroissent et lorsque p et z croissent.

Les Tables de tir que nous donnerons à la fin de cette Thèse, montreront bien l'exactitude de ces conclusions.

Chapitre XIII.

Influence de la Coiffe sur les divers éléments du Tir.

§ 141. Des projectiles munis de coiffe et chanfreinés au culot.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé les projectiles ogivaux dans lesquels le demi-angle ogival est de 30° environ. Or, dans ces dernières années on a fait usage d'obus très effilés.

Ceux-ci étaient munis d'une coiffe en tôle mince très allongée, comme l'indique la figure ci-contre et dont le demi angle terminal était inférieur à 5°. De plus, l'arrière de ces projectiles était chanfreiné de manière à donner au culot une forme aussi fuyante que possible. (fig 40).

Avec ces nouveaux projectiles, on a réalisé, non sans quelque étonnement des gains considérables de portée.

Le gain ainsi obtenu en effilant les projectiles à l'avant s'explique assez aisément, car ce nouveau dispositif a pour effet de diminuer considérablement le coefficient de forme Λ .

Nous savons que :

$$\Lambda = \lambda \frac{a}{p} \sin \gamma,$$

or la coiffe ainsi établie fait attribuer à la quantité $\lambda \sin \gamma$ une valeur généralement inférieure à la moitié de la valeur prise par cette même quantité lorsque le projectile n'est pas coiffé.

Il est peut être plus difficile d'expliquer l'influence du chanfreinage de l'arrière du projectile.

On arrive cependant à se l'expliquer si l'on réfléchit que, par ce procédé, on supprime les remous d'air violents qui prennent naissance derrière un obus à culot plat, ainsi que le vide partiel qui s'y produit.

Le projectile à culot plat ne subissant plus à l'arrière, par suite de ce vide artificiel, l'effet de la



Fig 40

pression atmosphérique, qu'il subit à l'avant, éprouve, en effet, d'avant en arrière, une poussée constante qui a pour conséquence de réduire sa vitesse. En supprimant le culot plat, on supprime le phénomène de la cavitation, on diminue la résistance de l'air et en fin de compte on augmente considérablement la portée.

§ 142. Des projectiles rayés. — Il a été constaté que les projectiles que les Allemands ont lancé sur Paris, en 1918, avec leurs canons à très longues portées étaient rayés. Ces rayures ont été l'objet de nombreuses conjectures sur leur efficacité. A notre humble avis, toutes ces conjectures sont inexactes et nous pensons que les rayures ainsi tracées et disposées sur ces obus n'avaient pas d'autre but que de diminuer le coefficient de forme Λ du projectile ainsi que la résistance de l'air. Un tel projectile ne fendait pas l'air, on peut dire qu'il le vrillait. Il devait en résulter des tourbillons distribués de telle façon que l'air offrait une résistance amoindrie. Il serait intéressant de faire des expériences sur la résistance de l'air ainsi vrillé.

§ 143. Influence de la coiffe sur la portée. — La formule des portées est :

$$X = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha} - 1 \right);$$

supposons que K prenne la valeur K' telle que :

$$K' = nK,$$

avec la condition :

$$0 < n < 1;$$

il vient :

$$X' = \frac{1}{2nKV^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4nKV^4}{g} \sin 2\alpha} - 1 \right),$$

étudions la valeur du rapport $\frac{X'}{X}$.

Nous avons successivement :

$$\frac{X'}{X} = \frac{\frac{1}{2nKV^2}}{\frac{1}{2KV^2}} \times \frac{\sqrt{1 + \frac{4nKV^4}{g} \sin 2\alpha} - 1}{\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha} - 1} = \frac{1}{n} \times \frac{\sqrt{1 + \frac{4nKV^4}{g} \sin 2\alpha} - 1}{\sqrt{1 + \frac{4KV^4}{g} \sin 2\alpha} - 1};$$

posons :

$$\frac{4KV^4}{g} = p$$

nous avons :

$$\frac{X'}{X} = \frac{1}{n} \times \frac{\sqrt{1 + np \sin 2\alpha} - 1}{\sqrt{1 + p \sin 2\alpha} - 1}.$$

Multiplions haut et bas par :

$$\sqrt{1 + p \sin 2\alpha} + 1,$$

nous obtenons :

$$\frac{X'}{X} = \frac{1}{n} \times \frac{(\sqrt{1 + np \sin 2\alpha} - 1)(\sqrt{1 + p \sin 2\alpha} + 1)}{(\sqrt{1 + p \sin 2\alpha} - 1)(\sqrt{1 + p \sin 2\alpha} + 1)},$$

ou :

$$\frac{X'}{X} = \frac{1}{n} \times \frac{\sqrt{(1 + np \sin 2\alpha)(1 + p \sin 2\alpha)} + \sqrt{1 + np \sin 2\alpha} - \sqrt{1 + p \sin 2\alpha} - 1}{1 + p \sin 2\alpha - 1},$$

et finalement :

$$\frac{X'}{X} = \frac{1}{np \sin 2\alpha} \left(\sqrt{1 + p \sin 2\alpha + np \sin 2\alpha + np^2 \sin^2 2\alpha} + \sqrt{1 + np \sin 2\alpha} - \sqrt{1 + p \sin 2\alpha} - 1 \right) \quad (453)$$

Dans le cas particulier où : $\alpha = 45^\circ$, on a : $\sin 2\alpha = 1$,
et la relation précédente peut s'écrire :

$$\frac{X'}{X} = \frac{1}{np} \times \left(\sqrt{1+p+np+np^2} + \sqrt{1+np} - \sqrt{1+p} - 1 \right), \quad (454)$$

On peut encore mettre le rapport $\frac{X'}{X}$ sous l'une des deux formes :

$$\frac{X'}{X} = \frac{1}{np} \times \left(\sqrt{1+np} - 1 \right) \left(\sqrt{1+p} + 1 \right),$$

ou :

$$\frac{X'}{X} = \frac{1}{np} \times \left[(1+np)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \cdot \left[(1+p)^{\frac{1}{2}} + 1 \right].$$

Il n'y a pas lieu de prendre en considération les développements en série, car on obtient :

$$(1+np)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{n}{2}p - \frac{n^2}{8}p^2 + \frac{n^3}{16}p^3 - \frac{5n^4}{128}p^4 + \frac{7n^5}{256}p^5 - \dots,$$

et :

$$(1+p)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}p - \frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{16}p^3 - \frac{5}{128}p^4 + \frac{7}{256}p^5 - \dots,$$

et la série obtenue pour le rapport $\frac{X'}{X}$ est alternée et ne donne rien d'intéressant. Ainsi, dans le cas de $n = \frac{1}{2}$, on trouve :

$$\frac{X'}{X} = 1 + \frac{1}{8}p - \frac{1}{16}p^2 + \frac{21}{512}p^3 - \frac{5}{1024}p^4 + \frac{283}{16384}p^5 - \dots$$

Il est beaucoup plus commode de se servir directement de la formule :

$$\xi = \frac{X'}{X} = \frac{1}{np} \times \left(\sqrt{1+np} - 1 \right) \left(\sqrt{1+p} + 1 \right) \quad (455)$$

Nous avons calculé les valeurs de la fonction ξ en attribuant à p les valeurs successives :

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
10,	20,	30,	40,	50,	60,	70,	80,	90,
100,	200,	300,	400,	500,	600,	700,	800,	900,
1 000,	2 000,	3 000,	4 000,	5 000,	6 000,	7 000,	8 000,	9 000,
10 000.								

et à n , les valeurs :

0,2 0,3 0,4 0,5 et 0,6

Dans le cas particulier pour lequel :

$$n = 0,5$$

la formule (455) devient :

$$\xi = \frac{2}{p} \left(\sqrt{\frac{2+p}{2}} - 1 \right) \cdot \left(\sqrt{1+p} + 1 \right). \quad (456)$$

et les valeurs correspondantes de ξ varient de :

$$\xi = 1,0849, \quad \text{pour} \quad p = 1,$$

et :

$$\xi = 1,4083, \quad \text{pour} \quad p = 10\,000.$$

Nous verrons dans la troisième Partie de notre thèse, que pour les canons de gros calibre et à très longues portées, la quantité :

$$p = \frac{4KV^4}{g}$$

varie de la valeur 5 à la valeur 100.

En conséquence, nous envisagerons plus spécialement la fonction ξ , lorsque :

$$5 \leq p \leq 100$$

Nous donnons d'ailleurs, dans la Table ci-après, les différentes valeurs de la fonction ξ quand p varie de 1 à 10 000 ; n recevant les valeurs :

0,2 0,3 0,4 0,5 et 0,6

$\rho \backslash n$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	$\rho \backslash n$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1	1,1515	1,1274	1,1057	1,0849	1,0658	100	1,9792	1,6824	1,4925	1,3572	1,2541
2	1,2512	1,2061	1,1665	1,1315	1,1000	200	2,0501	1,7226	1,5177	1,3735	1,2647
3	1,3245	1,2613	1,2080	1,1622	1,1222	300	2,0827	1,7410	1,5291	1,3808	1,2695
4	1,3817	1,3030	1,2385	1,1843	1,1378	400	2,1024	1,7520	1,5359	1,3852	1,2723
5	1,4287	1,3362	1,2624	1,2014	1,1498	500	2,1161	1,7596	1,5406	1,3882	1,2743
6	1,4680	1,3636	1,2819	1,2152	1,1592	600	2,1262	1,7653	1,5441	1,3905	1,2757
7	1,5015	1,3866	1,2979	1,2265	1,1670	700	2,1341	1,7697	1,5468	1,3922	1,2768
8	1,5311	1,4065	1,3117	1,2360	1,1735	800	2,1405	1,7732	1,5490	1,3936	1,2777
9	1,5568	1,4236	1,3234	1,2442	1,1791	900	2,1459	1,7762	1,5508	1,3948	1,2785
10	1,5798	1,4388	1,3338	1,2512	1,1839	1000	2,1504	1,7787	1,5523	1,3958	1,2791
20	1,7249	1,5311	1,3956	1,2932	1,2121	2000	2,1751	1,7923	1,5607	1,4011	1,2826
30	1,8014	1,5778	1,4260	1,3135	1,2255	3000	2,1861	1,7984	1,5644	1,4035	1,2841
40	1,8057	1,6073	1,4450	1,3260	1,2338	4000	2,1927	1,8020	1,5666	1,4049	1,2850
50	1,8860	1,6282	1,4583	1,3348	1,2395	5000	2,1973	1,8045	1,5681	1,4059	1,2856
60	1,9129	1,6439	1,4683	1,3414	1,2438	6000	2,2006	1,8063	1,5693	1,4066	1,2861
70	1,9343	1,6564	1,4762	1,3465	1,2472	7000	2,2032	1,8078	1,5701	1,4072	1,2865
80	1,9519	1,6666	1,4826	1,3507	1,2500	8000	2,2053	1,8089	1,5708	1,4076	1,2868
90	1,9666	1,6751	1,4880	1,3542	1,2522	9000	2,2071	1,8099	1,5714	1,4080	1,2870
100	1,9792	1,6824	1,4925	1,3572	1,2541	10000	2,2085	1,8107	1,5719	1,4083	1,2872

En résumé, la Table ci-dessus montre que dans les limites précédemment fixées pour ρ , on peut adopter pour la fonction ξ , la valeur moyenne :

$$\xi_m = 1,4$$

§ 144. Influence de la crosse sur l'angle de chute — Nous savons que l'angle de chute ω est déterminé par la formule :

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \alpha \left(1 + \frac{S}{1+S} \right),$$

dans laquelle :

$$S = KV^2 X.$$

Dans le cas particulier, où :

$$\alpha = 45^\circ,$$

on a :

$$\operatorname{tg} \alpha = 1;$$

et la formule précédente devient :

$$\operatorname{tg} \omega = 1 + \frac{S}{1+S} = 1 + \frac{KV^2 X}{1+KV^2 X} = \frac{1+2KV^2 X}{1+KV^2 X}.$$

Donnons à K une autre valeur K' , telle que :

$$K' = nK,$$

avec la condition :

$$0 < n < 1.$$

X' étant la nouvelle portée, nous avons :

$$\operatorname{tg} \omega' = 1 + \frac{nKV^2 X'}{1+nKV^2 X'}.$$

mais, nous savons que :

$$X' = \xi X,$$

de telle sorte qu'on peut écrire successivement :

$$\operatorname{tg} \omega' = 1 + \frac{nKV^2 \xi X}{1+nKV^2 \xi X} = \frac{1+2nKV^2 \xi X}{1+nKV^2 \xi X} = \frac{1+2n\xi S}{1+n\xi S},$$

nous en déduisons :

$$\frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{1+2n\xi S}{1+n\xi S} \times \frac{1+S}{1+2S} = \frac{1+2n\xi S+S+2n\xi S^2}{1+n\xi S+2S+2n\xi S^2},$$

ou:

$$\frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{2n\tilde{z}S^2 + (2n\tilde{z}+1)S+1}{2n\tilde{z}S^2 + (n\tilde{z}+2)S+1} = 1 + \frac{(n\tilde{z}-1)S}{2n\tilde{z}S^2 + (n\tilde{z}+2)S+1},$$

et, comme en général:

$$n\tilde{z} < 1.$$

dans les limites fixées, on a:

$$\frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} < 1.$$

Il en résulte que dans nos hypothèses, la coiffe a pour effet de diminuer l'angle de chute.

Posons:

$$\chi = 1 - \frac{(n\tilde{z}-1)S}{2n\tilde{z}S^2 + (n\tilde{z}+2)S+1} \quad (457)$$

cette fonction χ passe par un minimum pour une valeur de S comprise entre 0,8 et 2, suivant les valeurs de $n\tilde{z}$, car la dérivée:

$$\frac{d\chi}{dS} = \frac{n\tilde{z}-1}{[2n\tilde{z}S^2 + (n\tilde{z}+2)S+1]^2} \times (1-2n\tilde{z}S^2)$$

s'annule, en passant du négatif au positif, pour:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2n\tilde{z}}}, \quad \text{car } n\tilde{z} < 1.$$

Dans les limites fixées, $n\tilde{z}$ varie entre: 0,20 et 0,80 :

$$0,20 < n\tilde{z} < 0,80,$$

les valeurs minima de la fonction χ , sont:

0,771 43	pour: $n\tilde{z} = 0,20$	et $S = 2$	0,903 23	pour: $n\tilde{z} = 0,55$	et $S = 1$
0,800 00	"	0,25 " 2 et 1	0,916 52	"	0,60 " 0,9
0,820 52	"	0,30 " 1	0,929 05	"	0,65 " 0,9
0,839 51	"	0,35 " 1	0,940 83	"	0,70 " 0,8
0,857 15	"	0,40 " 1	0,951 93	"	0,75 " 0,8
0,873 57	"	0,45 " 1	0,962 48	"	0,80 " 0,8
0,888 89	"	0,50 " 1			

La Table ci-après donne les valeurs de la fonction χ , pour:

$S =$ 0,01 0,05 0,1 0,5 1 5 10 50 et 100 ;

et pour:

$n\tilde{z} =$ 0,20 0,25 0,30 0,35 0,40 0,45 0,50 0,55 0,60 0,65
 0,70 0,75 et 0,80

$S \backslash n\tilde{z}$	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
0,01	0,992 18	0,992 67	0,993 16	0,993 65	0,994 15	0,994 64	0,995 13	0,995 62	0,996 11	0,996 59	0,997 08	0,997 57	0,998 06
0,05	0,963 97	0,966 33	0,968 66	0,970 97	0,973 27	0,975 56	0,977 83	0,980 10	0,982 35	0,984 59	0,986 83	0,989 05	0,991 26
0,1	0,934 65	0,939 03	0,943 37	0,947 67	0,951 93	0,956 15	0,960 32	0,964 46	0,968 56	0,972 62	0,976 64	0,980 63	0,984 57
0,5	0,818 19	0,833 34	0,847 83	0,861 71	0,875 00	0,887 76	0,900 00	0,911 77	0,923 08	0,933 97	0,944 45	0,954 55	0,964 29
1	0,777 78	0,800 00	0,820 52	0,839 51	0,857 15	0,873 57	0,888 89	0,903 23	0,916 67	0,929 29	0,941 18	0,952 39	0,962 97
5	0,818 19	0,848 49	0,872 73	0,892 57	0,909 09	0,923 08	0,935 07	0,945 46	0,954 55	0,962 57	0,969 70	0,976 08	0,981 82
10	0,873 02	0,897 96	0,916 67	0,931 22	0,942 86	0,952 39	0,960 32	0,967 04	0,972 79	0,977 78	0,982 15	0,986 00	0,989 42
50	0,964 00	0,972 50	0,978 35	0,982 61	0,985 86	0,988 42	0,990 48	0,992 19	0,993 62	0,994 83	0,995 88	0,996 79	0,997 59
100	0,981 05	0,985 65	0,988 77	0,991 02	0,992 72	0,994 06	0,995 13	0,996 01	0,996 74	0,997 37	0,997 90	0,998 37	0,998 78

Si nous remarquons que pour les canons de gros calibre et à très longues portées la quantité auxiliaire:

$$S = KV^2 X,$$

varie entre 1 et 3:

$$1 \leq S \leq 3$$

les valeurs correspondantes de la fonction χ sont indiquées dans la Table ci-dessous pour :

$$S = 1, 2, \text{ et } 3$$

et $n\zeta = 0,20 \quad 0,25 \quad 0,30 \quad 0,35 \quad 0,40 \quad 0,45 \quad 0,50 \quad 0,55 \quad 0,60 \quad 0,65 \quad 0,70 \quad 0,75 \text{ et } 0,80$

$S \backslash n\zeta$	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
1	0,77778	0,80000	0,82052	0,83951	0,85715	0,87357	0,88889	0,90323	0,91667	0,92929	0,94118	0,95239	0,96297
2	0,77143	0,80000	0,82500	0,84706	0,86667	0,88422	0,90000	0,91429	0,92728	0,93914	0,95000	0,96000	0,96924
3	0,78571	0,81633	0,84211	0,86412	0,88312	0,89970	0,91429	0,92723	0,93878	0,94916	0,95853	0,96704	0,97479

En résumé, la Table précédente montre que dans les limites précédemment fixées, on peut adopter pour la fonction χ la valeur moyenne :

$$\chi_m = 0,9$$

§ 145. Influence de la crosse sur la Durée totale de trajet — Nous avons trouvé la formule :

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}} \times \sqrt{\frac{1}{1+S}} \times \sqrt{X \operatorname{tg} \alpha},$$

ou encore :

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}} \times \sqrt{\frac{1}{1+KV^2X}} \times \sqrt{X \operatorname{tg} \alpha}.$$

Dans le cas particulier où :

$$\alpha = 45^\circ,$$

on a :

$$\operatorname{tg} \alpha = 1$$

et la formule précédente devient :

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}} \times \sqrt{\frac{1}{1+KV^2X}} \times \sqrt{X}.$$

Donnons à K une valeur K' , telle que :

$$K' = nK,$$

avec la condition :

$$0 < n < 1,$$

X étant la portée correspondante et T' la nouvelle durée totale de trajet, nous pouvons écrire :

$$T' = \sqrt{\frac{2}{g}} \times \sqrt{\frac{1}{1+nKV^2X}} \times \sqrt{X'},$$

Or,

$$X' = \zeta X,$$

donc :

$$T' = \sqrt{\frac{2}{g}} \times \sqrt{\frac{1}{1+nKV^2\zeta X}} \times \sqrt{\zeta X},$$

et par suite :

$$\frac{T'}{T} = \frac{\sqrt{\zeta X}}{\sqrt{1+nKV^2\zeta X}} : \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{1+KV^2X}} = \frac{\sqrt{\zeta X}}{\sqrt{1+nKV^2\zeta X}} \times \frac{\sqrt{1+KV^2X}}{\sqrt{X}},$$

ce qui donne :

$$\frac{T'}{T} = \frac{\sqrt{1+KV^2X}}{\sqrt{1+nKV^2\zeta X}} \cdot \sqrt{\zeta} = \frac{\sqrt{1+S}}{\sqrt{1+S n \zeta}} \times \sqrt{\zeta}.$$

Comme pour les canons de gros calibre et à très longues portées, on a :

$$1 \leq S \leq 3$$

nous donnons dans la Table ci-après les valeurs de la fonction ζ , définie par la relation :

$$\zeta = \sqrt{\frac{1+S}{1+S n \zeta}} \quad (458)$$

pour :

$$S = 1, 2, \text{ et } 3$$

et $n\bar{\xi} = 0,20 \quad 0,25 \quad 0,30 \quad 0,35 \quad 0,40 \quad 0,45 \quad 0,50 \quad 0,55 \quad 0,60 \quad 0,65 \quad 0,70 \quad 0,75 \text{ et } 0,80$,
il sera facile d'en déduire:

$$T' = T \cdot \tau \cdot \sqrt{\bar{\xi}}$$

$\frac{S}{n\bar{\xi}}$	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
1	1,291	1,265	1,240	1,217	1,194	1,174	1,154	1,136	1,118	1,100	1,084	1,069	1,053
2	1,464	1,414	1,369	1,328	1,291	1,256	1,225	1,195	1,168	1,142	1,118	1,095	1,074
3	1,581	1,511	1,450	1,397	1,348	1,304	1,265	1,228	1,195	1,164	1,136	1,109	1,085

En résumé, si nous attribuons à $\bar{\xi}$ sa valeur moyenne:

$$\bar{\xi}_m = 1,4$$

la Table précédente montre que nous pouvons adopter pour la fonction τ la valeur moyenne:

$$\tau_m = 1,225$$

il en résulte sensiblement:

$$\tau_m \sqrt{\bar{\xi}_m} = 1,45$$

La durée totale de trajet est donc augmentée à peu près dans le même rapport que la portée.

§ 146. Influence de la coiffe sur la vitesse restante tangentielle.

Soit v la vitesse restante tangentielle au point de chute, nous avons que:

$$v = V \cos \alpha \cdot \frac{1}{\cos \omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+3KV^2X}}$$

ou, en posant: $KV^2X = S$

$$v = V \cos \alpha \cdot \frac{1}{\cos \omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+3S}}$$

Donnons à K une autre valeur K' , telle que:

$$K' = nK,$$

avec la condition:

$$0 < n < 1,$$

X' étant la portée correspondante et ω' le nouvel angle de chute; la nouvelle vitesse restante tangentielle au point de chute est alors:

$$v_1 = V \cos \alpha \cdot \frac{1}{\cos \omega'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+3nKV^2X'}}$$

or: $X' = \bar{\xi} X$,

donc:

$$v_1 = V \cos \alpha \cdot \frac{1}{\cos \omega'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+3n\bar{\xi}KV^2X}}$$

et nous en déduisons:

$$\frac{v_1}{v} = \frac{\frac{1}{\cos \omega'}}{\frac{1}{\sqrt{1+3n\bar{\xi}KV^2X}}} : \frac{\frac{1}{\cos \omega}}{\frac{1}{\sqrt{1+3KV^2X}}} = \frac{\cos \omega}{\cos \omega'} \times \frac{\sqrt{1+3KV^2X}}{\sqrt{1+3n\bar{\xi}KV^2X}},$$

ou encore:

$$\frac{v_1}{v} = \frac{\cos \omega}{\cos \omega'} \times \frac{\sqrt{1+3S}}{\sqrt{1+3n\bar{\xi}S}},$$

et comme:

$$\cos \omega = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 \omega}},$$

et

$$\cos \omega' = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 \omega'}}$$

nous pouvons écrire:

$$\frac{\cos \omega}{\cos \omega'} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 \omega}} : \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 \omega'}} = \frac{\sqrt{1+tg^2 \omega'}}{\sqrt{1+tg^2 \omega}}$$

Ponons:

$$u = \frac{\sqrt{1+3S}}{\sqrt{1+3n\bar{\xi}S}};$$

nous en déduisons:

$$\frac{v_1}{v} = u \frac{\sqrt{1+tg^2 \omega'}}{\sqrt{1+tg^2 \omega}}.$$

(459)

Tout revient à calculer la fonction v dans les limites fixées pour la quantité S , quand il s'agit de canons de gros calibre et à très longues portées. Soit donc $1 \leq S \leq 3$

Dans le tableau ci-après, nous donnons les valeurs de la fonction v , pour :

$S = 1, 2 \text{ et } 3$

et $n\tilde{z} = 0,20 \quad 0,25 \quad 0,30 \quad 0,35 \quad 0,40 \quad 0,45 \quad 0,50 \quad 0,55 \quad 0,60 \quad 0,65 \quad 0,70 \quad 0,75 \text{ et } 0,80$

Il est dès lors facile d'en déduire :

$$v_1 = v \times \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \omega'}{1 + \operatorname{tg}^2 \omega}}$$

$S \backslash n\tilde{z}$	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
1	1,5811	1,5118	1,4509	1,3968	1,3484	1,3046	1,2649	1,2285	1,1952	1,1644	1,1359	1,1094	1,0846
2	1,7877	1,6753	1,5811	1,5026	1,4348	1,3754	1,3228	1,2758	1,2335	1,1952	1,1602	1,1281	1,0985
3	1,8898	1,7541	1,6439	1,5523	1,4744	1,4071	1,3483	1,2964	1,2499	1,2082	1,1704	1,1359	1,1043

En résumé, si nous attribuons à ω sa valeur moyenne, soit :

$$\omega_m = 64^\circ,$$

et à v sa valeur moyenne :

$$v_m = 1,32,$$

nous constatons que la valeur moyenne de l'expression :

est donnée par :

$$v_m \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \omega_m}{1 + 0,9 \operatorname{tg}^2 \omega_m}} = 1,38$$

$$v \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \omega'}{1 + \operatorname{tg}^2 \omega}}$$

et que nous pouvons adopter :

$$[v_1]_m = 1,38 v$$

§ 147. Influence de la coiffe sur la vitesse restante verticale. — La vitesse restante verticale au point de chute est donnée par la formule :

$$v'' = v \sin \omega = V \cos \alpha \operatorname{tg} \omega \cdot \frac{1}{\sqrt{1+3S}} = V \cos \alpha \operatorname{tg} \omega \cdot \frac{1}{\sqrt{1+3KV^2X}}$$

Si nous donnons à K une autre valeur K' , telle que :

$$K' = nK,$$

avec la condition :

$$0 < n < 1,$$

et si X' et ω' sont les valeurs correspondantes de X et ω , la vitesse restante v'' prend la nouvelle valeur v'_1 :

$$v'_1 = V \cos \alpha \operatorname{tg} \omega' \cdot \frac{1}{\sqrt{1+3nKV^2X}},$$

et comme : $X' = \tilde{z} X$, il vient :

$$v'_1 = V \cos \alpha \operatorname{tg} \omega' \cdot \frac{1}{\sqrt{1+3n\tilde{z}KV^2X}},$$

et par suite :

$$\frac{v'_1}{v''} = \frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} \times \frac{\sqrt{1+3KV^2X}}{\sqrt{1+3n\tilde{z}KV^2X}} = \frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} \times \frac{\sqrt{1+3S}}{\sqrt{1+3n\tilde{z}S}},$$

mais :

$$\frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} = 1 + \frac{(n\tilde{z}-1)S}{2n\tilde{z}S^2 + (n\tilde{z}+2)S + 1},$$

desorte que :

$$\frac{v'_1}{v''} = \left[1 + \frac{(n\tilde{z}-1)S}{2n\tilde{z}S^2 + (n\tilde{z}+2)S + 1} \right] \times \sqrt{\frac{1+3S}{1+3n\tilde{z}S}}$$

et comme :

$$\chi = 1 + \frac{(n\tilde{z}-1)S}{2n\tilde{z}S^2 + (n\tilde{z}+2)S + 1},$$

et :

$$v = \sqrt{\frac{1+3S}{1+3n\tilde{z}S}}$$

il en résulte :

$$\frac{v'_1}{v''} = \chi v,$$

ce qui donne:

$$v_1'' = v'' \cdot \chi \cdot u$$

(460)

La Table ci-dessous donne les valeurs du produit χu , pour:

$$S = 1, 2 \text{ et } 3$$

$$\text{et } n\tilde{z} = 0,20 \quad 0,25 \quad 0,30 \quad 0,35 \quad 0,40 \quad 0,45 \quad 0,50 \quad 0,55 \quad 0,60 \quad 0,65 \quad 0,70 \quad 0,75 \text{ et } 0,80$$

$S \backslash n\tilde{z}$	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
1	1,2297	1,2094	1,1904	1,1726	1,1557	1,1396	1,1243	1,1096	1,0956	1,0821	1,0691	1,0565	1,0444
2	1,3790	1,3386	1,3044	1,2727	1,2434	1,2161	1,1905	1,1664	1,1437	1,1224	1,1021	1,0829	1,0647
3	1,4848	1,4319	1,3843	1,3413	1,3021	1,2659	1,2327	1,2021	1,1733	1,1467	1,1218	1,0984	1,0764

En résumé, si nous attribuons à ω sa valeur moyenne, soit:

$$\omega_m = 64^\circ$$

et au produit χu , sa valeur moyenne, soit:

$$\chi_m u_m = 1,2$$

nous constatons que nous pouvons adopter pour v_1'' la valeur moyenne:

$$[v_1'']_m = 1,2 v''$$

Pour la vitesse restante horizontale au point de chute, on obtient, de même, comme valeur moyenne:

$$[v_1']_m = 1,32 v'$$

§ 148. Influence de la coiffe sur l'énergie cinétique du projectile au point de chute. — Pour l'énergie cinétique du projectile au point de chute, nous savons que:

$$E = 0,5 \frac{p}{g} V^2 \gamma^2 \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \omega} = 0,5 \frac{p}{g} v_1'^2$$

Pour une autre valeur K' de K , telle que:

$$K' = nK,$$

avec la condition:

$$0 < n < 1,$$

nous avons:

$$E_1 = 0,5 \frac{p}{g} v_1'^2 = 0,5 \frac{p}{g} v''^2 \frac{1 + \tan^2 \omega}{1 + \tan^2 \omega'}$$

ou encore:

$$E_1 = E \cdot v''^2 \frac{1 + \tan^2 \omega}{1 + \tan^2 \omega'} \quad (461)$$

La Table ci-dessous donne les valeurs de v''^2 pour les valeurs précédemment indiquées de S et de $n\tilde{z}$.

$S \backslash n\tilde{z}$	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
1	2,4998	2,2855	2,1051	1,9510	1,8181	1,7039	1,5999	1,5092	1,4285	1,3558	1,2902	1,2306	1,1763
2	3,1776	2,7999	2,4998	2,2578	2,0583	1,8917	1,7498	1,6276	1,5215	1,4285	1,3460	1,2736	1,2067
3	3,5713	3,0768	2,7024	2,4096	2,1444	1,9799	1,8179	1,6806	1,5622	1,4597	1,3698	1,2902	1,2194

En résumé, si nous attribuons à ω sa valeur moyenne, soit:

$$\omega_m = 64^\circ$$

et par suite à v_1' sa valeur moyenne: $1,38 v'$; on peut donner à E_1 la valeur moyenne:

$$[E_1]_m = 1,38^2 v''^2 = 1,90 v''^2$$

Quant à la composante verticale de l'énergie cinétique du projectile au point de chute, elle est telle que:

$$E'' = 0,5 \frac{p}{g} V^2 \gamma^2 \cos^2 \alpha \tan^2 \omega = 0,5 \frac{p}{g} v''^2$$

Pour une autre valeur K' de K , telle que:

$$K' = nK,$$

avec la condition:

$$0 < n < 1,$$

nous avons:

$$E'' = 0,5 \frac{p}{g} v_1''^2 = 0,5 \frac{p}{g} v''^2 \chi^2 u^2 \quad (462)$$

La Table ci-dessous donne les valeurs de χ^2 pour les valeurs précédemment indiquées de S et de $n\tilde{z}$:

$S \backslash n\tilde{z}$	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
1	1,4876	1,4626	1,4170	1,3749	1,3356	1,2986	1,2640	1,2312	1,2003	1,1708	1,1376	1,1161	1,0907
2	1,8931	1,7918	1,7014	1,6197	1,5460	1,4799	1,4172	1,3604	1,3080	1,2597	1,2146	1,1726	1,1336
3	2,2046	2,0503	1,9162	1,7990	1,6953	1,6025	1,5195	1,4449	1,3766	1,3149	1,2584	1,2064	1,1586

En résumé, si nous attribuons à ω sa valeur moyenne, soit: $\omega_m = 64^\circ$,
et par suite à v'' sa valeur moyenne $1,2 v''_m$, nous pouvons attribuer à E'' la valeur moyenne:
 $1,2 v''_m = 1,44 v''_m$.

Remarquons que pour la composante horizontale de l'énergie cinétique du projectile au point de chute, nous pouvons lui attribuer la valeur moyenne.
 $1,32 v''_m = 1,74 v''_m$.

§ 149. Influence de la coiffe sur la flèche de la trajectoire. — Nous savons que la flèche de la trajectoire est donnée par la formule:

$$y_s = X \Sigma \operatorname{tg} \alpha.$$

Pour une autre valeur K' de K , telle que:

$$K' = nK,$$

avec la condition:

$$0 < n < 1,$$

X' et Σ' étant les valeurs correspondantes de X et Σ , nous avons pour la nouvelle flèche:

$$y'_s = X' \Sigma' \operatorname{tg} \alpha$$

par suite:

$$\frac{y'_s}{y_s} = \frac{X'}{X} \cdot \frac{\Sigma'}{\Sigma} = \frac{\tilde{z} X'}{X} \cdot \frac{\Sigma'}{\Sigma} = \tilde{z} \times \frac{\Sigma'}{\Sigma} \quad (463)$$

sachant que:

$$\Sigma = \frac{49S^3 + 98S^2 + 68S + 16}{126S^3 + 300S^2 + 240S + 64}$$

et

$$\Sigma' = \frac{49n^3 \tilde{z}^3 S^3 + 98n^2 \tilde{z}^2 S^2 + 68n \tilde{z} S + 16}{126n^3 \tilde{z}^3 S^3 + 300n^2 \tilde{z}^2 S^2 + 240n \tilde{z} S + 64}$$

Pour avoir la valeur moyenne de l'expression $\tilde{z} \times \frac{\Sigma'}{\Sigma}$, attribuons à $\tilde{z}$ sa valeur moyenne: $\tilde{z}_m = 1,43$
et à S et $n\tilde{z}$ respectivement les valeurs: $S = 2$ et $n\tilde{z} = 0,50$

nous trouvons

$$\tilde{z}_m = 1,43 \times \frac{231}{730} \cdot \frac{936}{2752} = 1,33$$

de sorte que nous pouvons écrire:

$$[y'_s]_m = 1,33 y_s$$

§ 150. Résumé. — Il résulte de tout ce qui précède que la coiffe dont on peut munir un projectile modifie les éléments du tir. Les valeurs moyennes de ces modifications sont données par les formules:

1°) Portées:

$$X' = 1,4 X,$$

2°) Angles de chute:

$$\operatorname{tg} \omega' = 0,9 \operatorname{tg} \omega,$$

3°) Durées totales de trajet:

$$T' = 1,45 T,$$

4°) Vitesses restantes tangentielles au point de chute:

$$v_1 = 1,38 v,$$

5°) Vitesses restantes verticales au point de chute:

$$v''_1 = 1,2 v'',$$

6°) Vitesses restantes horizontales au point de chute:

$$v'_1 = 1,32 v',$$

7°) Energie cinétique du projectile au point de chute:

$$E_1 = 1,90 E,$$

8°) Composante verticale de cette énergie cinétique:

$$E''_1 = 1,44 E'',$$

9°) Composante horizontale de cette énergie cinétique:

$$E'_1 = 1,74 E',$$

10°) Flèche de la trajectoire:

$$y'_s = 1,33 y_s$$

Fin de la deuxième Partie.

Troisième Partie.

De l'Etablissement des Tables de Tir.

Chapitre III.

Etablissement de Tables de Tir spéciales.

§ 151. Rappel des formules générales.— Soit un canon de calibre a , lançant un projectile de poids p à la vitesse initiale V , sous l'angle de projection α , en un lieu d'altitude z , de latitude φ et suivant l'azimut ν , les formules paramétriques sont :

$$\Lambda = \lambda \frac{a}{p} \sin \gamma, \quad (464)$$

$$N = N \sec \alpha - M \sin \text{verse } \alpha, \quad (465)$$

$$\Delta = 1,292\,2743 \cdot \Xi \cdot \Psi, \quad (466)$$

$$10^6 K = 1,292\,2743 \cdot \Xi \cdot \Psi \cdot N \cdot \Lambda, \quad (467)$$

Les formules qui permettent de calculer les éléments du tir sont :

$$X = \frac{1}{2KV^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4KV^4 \sin 2\alpha}{g}} - 1 \right), \quad (468)$$

et en posant :

$$S = KV^2 X, \quad (469)$$

$$T = \Phi \sqrt{X \operatorname{tg} \alpha}, \quad (470) \quad \operatorname{tg} \omega = S \operatorname{tg} \alpha, \quad (471)$$

$$v = VY \frac{\cos \alpha}{\cos \omega}, \quad (472)$$

$$v' = VY \cos \alpha, \quad (473) \quad v'' = VY \cos \alpha \operatorname{tg} \omega, \quad (474)$$

$$E = 0,5 \frac{p}{g} v^2 = 0,5 \frac{p}{g} V^2 Y^2 \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \omega}, \quad (475)$$

$$E' = 0,5 \frac{p}{g} v'^2 = 0,5 \frac{p}{g} V^2 Y^2 \cos^2 \alpha, \quad (476) \quad E'' = 0,5 \frac{p}{g} v''^2 = 0,5 \frac{p}{g} V^2 Y^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \omega, \quad (477)$$

$$y_s = X S \operatorname{tg} \alpha, \quad (478)$$

Enfin les formules de correction sont, en posant :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{X}{R}, \quad (479)$$

$$\partial X = R \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \cotg (\omega - \theta), \quad (480)$$

$$\partial_2 X = -\frac{1}{6} g a T^3 \cos \varphi \sin \nu - \frac{1}{2} R a^2 T^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \nu, \quad (481) \quad \partial_2 y = a T X \cos \varphi \sin \nu + \frac{1}{2} R a^2 T^2 \cos^2 \varphi; \quad (482)$$

de cette dernière formule (482), on déduit la correction $\partial_2 X$ par la formule (480) qui détermine ∂X

puis

$$\partial_3 X = \frac{1}{500} X, \quad (483)$$

enfin $\partial_4 X$ est déterminé par la Table du § 121

On en déduit :

$$\partial X = \partial_1 X + \partial_2 X + \partial_3 X + \partial_4 X, \quad (484)$$

enfin :

$$\partial_2 Z = a T X \sin \varphi - \frac{1}{6} g a T^3 \cos \varphi \cos \nu - \frac{1}{2} R a^2 T^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \nu. \quad (485)$$

Si le projectile est coiffé et chanfreiné, les éléments du tir sont modifiés et déduits de ceux qui correspondent au projectile ordinaire de même poids par les formules ci-dessous.

$$X' = X \xi, \quad (486)$$

$$T' = T \cdot c \cdot \sqrt{\xi}, \quad (487) \quad \operatorname{tg} \omega' = \operatorname{tg} \omega \cdot \chi, \quad (488)$$

$$v_i = v \cdot u \cdot \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \omega}{1 + \operatorname{tg}^2 \omega'}}, \quad (489)$$

$$v'_i = v' \cdot u, \quad (490) \quad v''_i = v'' \cdot u \cdot \chi, \quad (491)$$

$$E_i = E \cdot u^2 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \omega}{1 - \operatorname{tg}^2 \omega'}, \quad (492)$$

$$E'_i = E' \cdot u^2, \quad (493) \quad E''_i = E'' \cdot u^2 \cdot \chi^2, \quad (494)$$

$$y'_s = y_s \cdot \xi \cdot \sigma. \quad (495)$$

§ 152. Rappel des formules dans le cas de l'angle de projection de plus grande portée. — Dans le cas de l'angle de projection de plus grande portée, les formules qui donnent les éléments du tir deviennent, quand on y fait :

$$\alpha = \alpha_m = 51^\circ 50'.$$

$$X_m = \frac{1}{2RV^2} \left(\sqrt{1 + 0,39625 RV^2} - 1 \right), \quad (496)$$

$$T_m = 1,128 \Phi \sqrt{X_m}, \quad (497) \quad \text{tg } \omega_m = 1,27230 \Omega, \quad (498)$$

$$v_m = VY \frac{0,61795}{\cos \omega_m}, \quad (499)$$

$$v'_m = VY \times 0,61795, \quad (500) \quad v''_m = VY \times 0,61795 \text{ tg } \omega_m, \quad (501)$$

$$E_m = 0,19093 \frac{p}{g} V^2 Y^2 \times \frac{1}{\cos^2 \omega_m} = 0,5 \frac{p}{g} v_m^2, \quad (502)$$

$$E'_m = 0,19093 \frac{p}{g} V^2 Y^2 = 0,5 \frac{p}{g} v_m'^2 \quad (503) \quad E''_m = 0,19093 \frac{p}{g} V^2 Y^2 \text{ tg}^2 \omega_m = 0,5 \frac{p}{g} v_m''^2 \quad (504)$$

$$[y_s]_m = 1,27230 \Sigma X_m \quad (505)$$

Les formules de correction ne sont pas modifiées et on peut faire usage des formules précédemment données.

§ 153. Effet utile d'un canon — Soient X_m la portée maximum et E_m l'énergie cinétique correspondante du projectile au point de chute; nous appellerons effet utile d'un coup de canon l'expression :

$$C = \sqrt{X_m \times E_m} \times 0,0005 \quad (506)$$

X_m étant exprimé en mètres et E_m en tonnes-kilomètres

§ 154. Rendement effectif d'un canon — Le nombre de coups qu'un canon peut tirer sans danger d'éclatement est fonction du calibre du canon, du poids et du paramètre de forme du projectile et enfin de la vitesse initiale. Ce nombre de coups est approximativement donné par la formule :

$$R = \frac{500}{V^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{10}{d} \right)^{\frac{3}{2}} \Lambda^{\frac{1}{4}}. \quad (507)$$

Quand un canon a ainsi tiré R coups, on peut le considérer comme usé; mais on peut encore l'utiliser en le réarasant et en augmentant son calibre, quitte à diminuer la vitesse initiale du projectile.

Nous appellerons tendement effectif d'un canon, l'expression

$$\bar{R} = R \times C, \quad (508)$$

de sorte que nous pouvons écrire :

$$\bar{R} = \frac{500}{V^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{10}{d} \right)^{\frac{3}{2}} \Lambda^{\frac{1}{4}} \times \left(0,0005 X_m E_m \right)^{\frac{1}{2}} \quad (509)$$

§ 155. Application au canon 360 160 045 tirant au lieu Z — Le canon du type 360 160 045, d'après nos conventions, est un canon dont le calibre est de 0^m,360 capable de lancer à la vitesse initiale de 1600 mètres un projectile de 450 kilogrammes.

Le lieu que nous avons désigné par Z est supposé à l'altitude de 200^m et à la latitude de 49° N; la ligne de tir faisant avec la méridienne du lieu un angle azimutal de 223°

Poursuite, on a : $a = 0^m,360$, $V = 1600^m$, $p = 450^{kg}$
et : $z = 200^m$, $\varphi = 49^\circ N$, $\nu = 223^\circ$.

Les calculs sont établis pour l'angle de projection de plus grande portée : $\alpha = 51^\circ 50'$.

1° Le projectile est ordinaire. Dans ce cas, on a : $\Lambda = \Lambda \frac{a}{p} \sin \gamma = 0,39 \times 0,000288 = 0,000112$,
 $M = 8075$, $N = 4038$,

par suite : $A' = 4038 \times \frac{1}{0,61795} - 8075 (1 - 0,61795) = 6535 - 3085 = 3450$.

De plus : $\Xi = 0,941$, $\Delta = 1,216$, $\Psi_{45^\circ 45'}^0 = 0,2136$, $\Psi_{45^\circ 45'}^{200} = 0,208$,
 $\Psi_{51^\circ 50', 45'}^{200} = 0,2136 \times 0,996 \times 0,86 \times 0,976 = 0,1786$;

et le paramètre R est donné par la formule :

$$10^{10}K = 1,216 \times 3450 \times 0,1786 \times 0,000112 = 0,083917,$$

il en résulte:

$$KV^2 = 0,000021483,$$

$$2KV^2 = 0,000042966,$$

$$KV^4 = 54,99585,$$

$$\frac{4KV^4}{g} = \rho = 22,427,$$

$$\frac{p}{g} = 45,877,$$

$$0,5 \frac{p}{g} = 22,939,$$

par suite:

$$X_m = 87837^m.$$

Pour la quantité auxiliaire S , on a:

$$S = KV^2 X_m = 1,887,$$

donc: $\Phi = 0,5066,$

$$\Omega = 1,6546,$$

$$\Upsilon = 0,3874,$$

$$\Sigma = 0,3383,$$

ce qui donne successivement:

$$T_m = 1,128 \times 0,5066 \times 296,4 = 169,4,$$

$$\lg \omega_m = 1,27230 \times 1,6546 = 2,10513,$$

d'où:

$$\omega_m = 64^\circ 35',$$

$$v_m = 892^m,$$

$$v_m' = 383^m,$$

$$v_m'' = 806^m,$$

d'où

$$v_m^2 = 796325,$$

$$v_m'^2 = 146689,$$

$$v_m''^2 = 649636,$$

puis

$$E_m = 18^{tkm}, 26,$$

$$E_m' = 3^{tkm}, 36,$$

$$E_m'' = 14^{tkm}, 90,$$

et:

$$[Y_s]_m = 1,27230 \times 87837 \times 0,3383 = 37807^m.$$

L'effet utile d'un coup de canon est:

$$C = 28,3$$

et comme:

$$\mathcal{R} = 188$$

le rendement effectif est:

$$\mathcal{R} = 5320$$

Les éléments correctifs sont:

$$\lg \theta = 0,013787,$$

d'où:

$$\theta = 0^\circ 47'$$

$$\partial_1 X_m = 300^m$$

$$\partial_2 X_m = 440^m$$

$$\partial_3 X_m = 260^m$$

$$\partial_4 X_m = -600^m$$

donc

$$\partial X_m = 300 + 440 + 260 - 600 = 400^m$$

de sorte que la véritable portée est:

$$87837 + 400 = 88237^m$$

soit:

$$X_m = 88^{km}, 2$$

2°) Le projectile est coiffé et chanfreiné. Supposons maintenant que le projectile soit coiffé et chanfreiné; soit de plus: $n = 0,4$; nous avons vu que:

$$\rho = 22,427,$$

par suite $K' = 0,4 \times 0,083917 = 0,03357$ et $\xi = 1,41$, donc:

$$X_m' = 1,41 \times 87837 = 123850^m,$$

alors:

$$n\xi = 0,564,$$

et comme:

$$S = 1,887$$

on trouve: $\tau = 1,18$, $\chi = 0,917$, $\nu = 1,259$, $\chi\nu = 1,155$, $\nu^2 = 1,585$, $\chi\nu^2 = 1,334$, et $G = 0,941$.

Les nouveaux éléments du tir sont:

$$X_m' = 123850^m$$

puis:

$$T_m' = 169,4 \times 1,18 \times \sqrt{1,41} = 237,9,$$

$$\lg \omega_m' = 2,10513 \times 0,917 = 1,93040,$$

d'où:

$$\omega_m' = 62^\circ 37',$$

$$[v]_m' = 1049^m,$$

$$[v]_m' = 383 \times 1,259 = 482^m,$$

$$[v]_m' = 806 \times 1,155 = 931^m,$$

$$[E]_m' = 25^{tkm}, 21$$

$$[E]_m' = 5^{tkm}, 33$$

$$[E]_m' = 19^{tkm}, 88$$

et

$$[Y_s]_m' = 37807 \times 1,41 \times 0,941 = 50167^m.$$

L'effet utile d'un coup de canon est:

$$C' = 39,5$$

et comme:

$$\mathcal{R} = 188,$$

le rendement effectif est:

$$\mathcal{R} = 7426.$$

Les éléments correctifs sont alors:

$$\partial_1 X_m' = 660^m,$$

$$\lg \theta' = 0,01944,$$

d'où:

$$\theta' = 1^\circ 07',$$

$$\partial_2 X_m' = 1000^m,$$

$$\partial_3 X_m' = 620^m,$$

$$\partial_4 X_m' = -1100^m,$$

il en résulte

$$\partial X_m' = 660 + 1000 + 620 - 1100 = 1180^m,$$

de sorte que la véritable portée est

$$123850 + 1180 = 124930^m.$$

Soit:

$$X_m' = 125^{km}.$$

Les résultats mettent bien en évidence les grands avantages offerts par les projectiles coiffés et chanfreinés. Aussi leur emploi se généralise-t-il

Pour le canon du type 360 160 045 tirant au lieu $\mathcal{Z}$, on a.

Conditions de Tir	$\alpha = 0^m,360$	$V = 1600^m$	$\rho = 450^{kg}$	$\alpha_m = 51^{\circ}50'$
	$z = 200^m$	$\varphi = 49^{\circ}N$	$\gamma = 223^{\circ}$	
Paramètres	$\Lambda = 0,000112$	$M = 8075$	$N = 4038$	$A = 3450$
	$E = 0,941$	$\Delta = 1,216$	$\Psi = 0,1786$	$n = 0,4$

Projectile ordinaire.			Projectile coiffé.		
$10^{10}K = 0,083917$	$\rho = 22,42$	$[y_s]_m = 37^{km},8$	$10^{10}K = 0,03357$	$\mathcal{Z} = 1,41$	$[y_s]_m = 50^{km},2$
$X_m = 87^{km},8$	$S = 1,887$	$\mathcal{C} = 28,3$	$X'_m = 123^{km},9$	$n\mathcal{Z} = 0,564$	$\mathcal{C}' = 39,5$
$T_m = 169^s,4$	$\omega_m = 64^{\circ}35'$	$\mathcal{H} = 188$	$T_m = 237^s,9$	$\omega'_m = 62^{\circ}37'$	$\mathcal{H} = 188$
$v'_m = 383^m$	$E'_m = 3^{tkm},36$	$\mathcal{R} = 5320$	$[v'_m]_m = 482^m$	$[E'_m]_m = 5^{tkm},33$	$\mathcal{R} = 7426$
$v''_m = 806^m$	$E''_m = 14^{tkm},90$	$\partial X_m = 400^m$	$[v''_m]_m = 931^m$	$[E''_m]_m = 19^{tkm},88$	$\partial X'_m = 1180^m$
$v_m = 892^m$	$E_m = 18^{tkm},26$		$[v_m]_m = 1049^m$	$[E_m]_m = 25^{tkm},21$	
$X_m \text{ corrigé} = 88^{km},2$			$X'_m \text{ corrigé} = 125^{km}$		

§ 156. Variation des éléments du tir avec le calibre du canon — Pour constater l'influence du calibre du canon sur les éléments du tir, établissons les Tables des canons : 320 160 045, 360 160 045 et 400 160 045 lançant sous l'angle de portée maximum $\alpha = 51^{\circ}50'$, si la vitesse initiale de 1600^m un projectile de 450^{kg}, au lieu $\mathcal{Z}$, pour lequel : $z = 200^m$, $\varphi = 49^{\circ}N$, $\gamma = 223^{\circ}$, les calibres de ces canons étant successivement : 0^m,320, 0^m,360 et 0^m,400. Nous trouvons :

Canon 320 160 045		Canon 360 160 045		Canon 400 160 045	
Projectiles ordinaires.					
$\Lambda = 0,000089$	$A = 3450$	$\Lambda = 0,000112$	$A = 3450$	$\Lambda = 0,000139$	$A = 3450$
$\Delta = 1,216$	$\Psi = 0,156$	$\Delta = 1,216$	$\Psi = 0,179$	$\Delta = 1,216$	$\Psi = 0,204$
$10^{10}K = 0,05825$	$\rho = 15,57$	$10^{10}K = 0,08392$	$\rho = 22,42$	$10^{10}K = 0,11896$	$\rho = 31,79$
$X_m = 101^{km},1$	$S = 1,51$	$X_m = 87^{km},8$	$S = 1,887$	$X_m = 76^{km},3$	$S = 2,64$
$T_m = 181^s$	$\omega_m = 63^{\circ}51'$	$T_m = 169^s$	$\omega_m = 64^{\circ}35'$	$T_m = 159^s$	$\omega_m = 65^{\circ}30'$
$v'_m = 421^m$	$E'_m = 4^{tkm},05$	$v'_m = 383^m$	$E'_m = 3^{tkm},36$	$v'_m = 331^m$	$E'_m = 2^{tkm},51$
$v''_m = 857^m$	$E''_m = 16^{tkm},81$	$v''_m = 806^m$	$E''_m = 14^{tkm},90$	$v''_m = 727^m$	$E''_m = 12^{tkm},13$
$v_m = 954^m$	$E_m = 20^{tkm},86$	$v_m = 892^m$	$E_m = 18^{tkm},26$	$v_m = 799^m$	$E_m = 14^{tkm},64$
$[y_s]_m = 42^{km},6$	$\mathcal{H} = 212$	$[y_s]_m = 37^{km},8$	$\mathcal{H} = 188$	$[y_s]_m = 33^{km},8$	$\mathcal{H} = 170$
$\mathcal{C} = 32,5$	$\mathcal{R} = 6890$	$\mathcal{C} = 28,3$	$\mathcal{R} = 5320$	$\mathcal{C} = 23,6$	$\mathcal{R} = 4012$
Projectiles coiffés					
$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,0233$	$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,0336$	$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,0476$
$\mathcal{Z} = 1,37$	$n\mathcal{Z} = 0,55$	$\mathcal{Z} = 1,41$	$n\mathcal{Z} = 0,56$	$\mathcal{Z} = 1,43$	$n\mathcal{Z} = 0,56$
$X'_m = 138^{km},5$	$\chi = 0,91$	$X'_m = 123^{km},9$	$\chi = 0,92$	$X'_m = 109^{km},1$	$\chi = 0,92$
$\omega'_m = 61^{\circ}40'$	$u = 1,25$	$\omega'_m = 62^{\circ}37'$	$u = 1,26$	$\omega'_m = 63^{\circ}39'$	$u = 1,29$
$[v'_m]_m = 526^m$	$[E'_m]_m = 6^{tkm},45$	$[v'_m]_m = 482^m$	$[E'_m]_m = 5^{tkm},33$	$[v'_m]_m = 427^m$	$[E'_m]_m = 4^{tkm},18$
$[v''_m]_m = 975^m$	$[E''_m]_m = 21^{tkm},82$	$[v''_m]_m = 931^m$	$[E''_m]_m = 19^{tkm},88$	$[v''_m]_m = 863^m$	$[E''_m]_m = 17^{tkm},09$
$[v_m]_m = 1108^m$	$[E_m]_m = 28^{tkm},17$	$[v_m]_m = 1049^m$	$[E_m]_m = 25^{tkm},21$	$[v_m]_m = 963^m$	$[E_m]_m = 21^{tkm},28$
$\mathcal{C}' = 44,2$	$\mathcal{R}' = 9370$	$\mathcal{C}' = 39,5$	$\mathcal{R}' = 7426$	$\mathcal{C}' = 34,1$	$\mathcal{R}' = 5797$

Il résulte de ces calculs que, toutes choses égales d'ailleurs, le rendement d'un canon est d'autant meilleur que le calibre est plus petit.

§ 157. Variation des éléments du tir avec la vitesse initiale. Pour montrer l'influence de la vitesse initiale sur les éléments du tir, établissons les Tables des canons 360 120 045, 360 160 045 et 360 200 045 de calibre 0^m360, lançant sous l'angle de portée maximum $\alpha = 51^\circ 50'$ un projectile de 450^{kg} aux vitesses initiales de 1200^m, 1600^m et 2000^m au lieu d'expérience λ pour lequel $z = 200^m$, $\varphi = 49^\circ N$ et $v = 223^\circ$.

Canon 360 120 045		Canon 360 160 045		Canon 360 200 045	
Projectiles ordinaires					
$\Lambda = 0,000\ 132$	$\Lambda' = 4\ 598$	$\Lambda = 0,000\ 112$	$\Lambda' = 3\ 450$	$\Lambda = 0,000\ 101$	$\Lambda' = 2\ 759$
$\Delta = 1,216$	$\Psi = 0,318$	$\Delta = 1,216$	$\Psi = 0,179$	$\Delta = 1,216$	$\Psi = 0,121$
$10^{10} R = 0,234\ 69$	$\rho = 19,82$	$10^{10} R = 0,083\ 92$	$\rho = 22,42$	$10^{10} R = 0,041\ 00$	$\rho = 26,75$
$X_m = 51^{km}, 8$	$S = 1,75$	$X_m = 87^{km}, 8$	$S = 1,887$	$X_m = 127^{km}, 9$	$S = 2,10$
$T_m = 130^s$	$\omega_m = 64^{\circ} 54'$	$T_m = 169^s$	$\omega_m = 64^{\circ} 35'$	$T_m = 205^s$	$\omega_m = 64^{\circ} 26'$
$v'_m = 297^m$	$E'_m = 2^{tkm}, 02$	$v'_m = 383^m$	$E'_m = 3^{tkm}, 36$	$v'_m = 457^m$	$E'_m = 4^{tkm}, 80$
$v''_m = 618^m$	$E''_m = 8^{tkm}, 75$	$v''_m = 806^m$	$E''_m = 14^{tkm}, 90$	$v''_m = 976^m$	$E''_m = 21^{tkm}, 85$
$v_m = 685^m$	$E_m = 10^{tkm}, 77$	$v_m = 892^m$	$E_m = 18^{tkm}, 26$	$v_m = 1078^m$	$E_m = 26^{tkm}, 64$
$[y]_m = 22^{km}, 1$	$\mathcal{A} = 227$	$[y]_m = 37^{km}, 8$	$\mathcal{A} = 188$	$[y]_m = 55^{km}, 6$	$\mathcal{A} = 164$
$\mathcal{E} = 16,7$	$\mathcal{R} = 3791$	$\mathcal{E} = 28,3$	$\mathcal{R} = 5320$	$\mathcal{E} = 41,3$	$\mathcal{R} = 6773$
Projectiles coiffes					
$n = 0,4$	$10^{10} R' = 0,093\ 88$	$n = 0,4$	$10^{10} R' = 0,033\ 6$	$n = 0,4$	$10^{10} R' = 0,016\ 4$
$\xi = 1,39$	$n\xi = 0,56$	$\xi = 1,41$	$n\xi = 0,56$	$\xi = 1,42$	$n\xi = 0,56$
$X'_m = 72^{km}, 0$	$\chi = 0,91$	$X'_m = 123^{km}, 9$	$\chi = 0,92$	$X'_m = 181^{km}, 6$	$\chi = 0,92$
$\omega'_m = 62^{\circ} 10'$	$v = 1,25$	$\omega'_m = 62^{\circ} 37'$	$v = 1,26$	$\omega'_m = 63^{\circ} 01'$	$v = 1,27$
$[v']_m = 371^m$	$[E']_m = 3^{tkm}, 16$	$[v']_m = 482^m$	$[E']_m = 5^{tkm}, 33$	$[v']_m = 580^m$	$[E']_m = 7^{tkm}, 72$
$[v'']_m = 703^m$	$[E'']_m = 11^{tkm}, 34$	$[v'']_m = 931^m$	$[E'']_m = 19^{tkm}, 88$	$[v'']_m = 1140^m$	$[E'']_m = 29^{tkm}, 81$
$[v]_m = 795^m$	$[E]_m = 14^{tkm}, 49$	$[v]_m = 1049^m$	$[E]_m = 25^{tkm}, 21$	$[v]_m = 1279^m$	$[E]_m = 37^{tkm}, 53$
$\mathcal{E}' = 22,8$	$\mathcal{R}' = 5176$	$\mathcal{E}' = 39,5$	$\mathcal{R}' = 7426$	$\mathcal{E}' = 59,2$	$\mathcal{R}' = 9709$

Il résulte de ces calculs que, toutes choses égales d'ailleurs, le rendement d'un canon est d'autant meilleur que la vitesse initiale est plus grande.

§ 158. Variation des éléments du tir avec le poids du projectile. Pour montrer l'influence du poids du projectile sur les éléments du tir, établissons les Tables des canons 360 160 033 puis 360 160 045 et 360 160 057 de calibre 0^m360, lançant sous l'angle de plus grande portée $\alpha = 51^\circ 50'$ à la vitesse initiale de 1600^m des projectiles pesant 330^{kg}, 450^{kg} et 570^{kg} au lieu d'expérience λ pour lequel $z = 200^m$, $\varphi = 49^\circ N$ et $v = 223^\circ$.

Canon 360 160 033		Canon 360 160 045		Canon 360 160 057	
Projectiles ordinaires					
$\Lambda = 0,000\,153$	$N = 3\,450$	$\Lambda = 0,000\,112$	$N = 3\,450$	$\Lambda = 0,000\,089$	$N = 3\,450$
$\Delta = 1,216$	$\Psi = 0,217$	$\Delta = 1,216$	$\Psi = 0,179$	$\Delta = 1,216$	$\Psi = 0,156$
$10^{10}R = 0,139\,28$	$\rho = 37,22$	$10^{10}R = 0,083\,92$	$\rho = 22,42$	$10^{10}R = 0,058\,25$	$\rho = 15,56$
$X_m = 70^{km},3$	$S = 2,61$	$X_m = 87^{km},8$	$S = 1,887$	$X_m = 104^{km},1$	$S = 1,51$
$T_m = 153^s$	$\omega_m = 65^{\circ}29'$	$T_m = 169^s$	$\omega_m = 64^{\circ}35'$	$T_m = 181^s$	$\omega_m = 63^{\circ}51'$
$v'_m = 333^m$	$E'_m = 1^{tkm},86$	$v'_m = 383^m$	$E'_m = 3^{tkm},36$	$v'_m = 421^m$	$E'_m = 5^{tkm},14$
$v''_m = 730^m$	$E''_m = 8^{tkm},96$	$v''_m = 806^m$	$E''_m = 14^{tkm},90$	$v''_m = 857^m$	$E''_m = 21^{tkm},34$
$v_m = 802^m$	$E_m = 10^{tkm},82$	$v_m = 892^m$	$E_m = 18^{tkm},26$	$v_m = 954^m$	$E_m = 26^{tkm},50$
$[y]_m = 31^{km},1$	$\mathcal{A} = 204$	$[y]_m = 37^{km},8$	$\mathcal{A} = 188$	$[y]_m = 42^{km},6$	$\mathcal{A} = 178$
$\mathcal{E} = 19,5$	$\mathcal{R} = 3\,978$	$\mathcal{E} = 28,3$	$\mathcal{R} = 5\,320$	$\mathcal{E} = 36,6$	$\mathcal{R} = 6\,515$

Projectiles coiffés.

$n = 0,4$	$10^{10}R' = 0,05571$	$n = 0,4$	$10^{10}R' = 0,0336$	$n = 0,4$	$10^{10}R' = 0,0233$
$\xi = 1,44$	$n\xi = 0,58$	$\xi = 1,41$	$n\xi = 0,56$	$\xi = 1,37$	$n\xi = 0,55$
$X'_m = 101^{km},2$	$\chi = 0,93$	$X'_m = 123^{km},9$	$\chi = 0,92$	$X'_m = 138^{km},5$	$\chi = 0,91$
$\omega'_m = 63^\circ 52'$	$u = 1,24$	$\omega'_m = 62^\circ 37'$	$u = 1,26$	$\omega'_m = 61^\circ 40'$	$u = 1,25$
$[v'_m] = 413^m$	$[E'_m] = 2^{tkm},87$	$[v'_m] = 482^m$	$[E'_m] = 5^{tkm},33$	$[v'_m] = 526^m$	$[E'_m] = 8^{tkm},04$
$[v''_m] = 842^m$	$[E''_m] = 11^{tkm},92$	$[v''_m] = 931^m$	$[E''_m] = 19^{tkm},88$	$[v''_m] = 975^m$	$[E''_m] = 27^{tkm},62$
$[v'_m] = 938^m$	$[E'_m] = 14^{tkm},79$	$[v'_m] = 1049^m$	$[E'_m] = 25^{tkm},21$	$[v'_m] = 1108^m$	$[E'_m] = 35^{tkm},67$
$[R'] = 27,4$	$[R] = 5590$	$[R'] = 39,5$	$[R] = 7426$	$[R'] = 48,9$	$[R] = 8704$

Il résulte de ces calculs que, toutes choses égales d'ailleurs, le rendement d'un canon est d'autant meilleur que le poids du projectile est plus lourd.

§ 159. Canons extrêmes 200 080 007 et 520 240 167 comparés au canon du type

pe moyen 360 160 045. — Nous nous proposons maintenant de comparer les Tables de tir des canons extrêmes 200 080 007 et 520 240 167 à la Table de tir du canon du type moyen 360 160 045 pour le lieu d'expérience X défini par : $z = 200^m$, $\varphi = 49^\circ N$ et $\nu = 223^\circ$, l'angle de tir étant celui de portée maximum, soit : $\alpha_m = 51^\circ 50'$.

Pour le canon 200 080 007 on a :	$a = 0^m,200$	$V = 800^m$	et	$p = 70^{kg}$
" 360 160 045 "	$a = 0^m,360$	$V = 1600^m$	et	$p = 450^{kg}$
" 520 240 167 "	$a = 0^m,520$	$V = 2400^m$	et	$p = 1670^{kg}$

Nous trouvons :

Canon 200 080 007		Canon 360 160 045		Canon 520 240 167	
Projectiles ordinaires					
$\Lambda = 0,000400$	$\Lambda' = 6900$	$\Lambda = 0,000112$	$\Lambda' = 3,450$	$\Lambda = 0,000053$	$\Lambda' = 2298$
$\Delta = 1,216$	$\Psi = 0,545$	$\Delta = 1,216$	$\Psi = 0,179$	$\Delta = 1,216$	$\Psi = 0,068$
$10^{10}R = 1,82911$	$\rho = 30,55$	$10^{10}R = 0,08392$	$\rho = 22,42$	$10^{10}R = 0,01007$	$\rho = 13,59$
$X_m = 19^{km},4$	$S = 2,27$	$X_m = 87^{km},8$	$S = 1,887$	$X_m = 240^{km},8$	$S = 1,39$
$T_m = 80^s$	$\omega_m = 65^\circ 08'$	$T_m = 169^s$	$\omega_m = 64^\circ 35'$	$T_m = 278^s$	$\omega_m = 63^\circ 34'$
$v_m' = 177^m$	$E_m' = 0^{tkm},11$	$v_m' = 383^m$	$E_m' = 3^{tkm},36$	$v_m' = 652^m$	$E_m' = 36^{tkm},19$
$v_m'' = 381^m$	$E_m'' = 0^{tkm},52$	$v_m'' = 806^m$	$E_m'' = 14^{tkm},90$	$v_m'' = 1312^m$	$E_m'' = 146^{tkm},53$
$v_m = 420^m$	$E_m = 0^{tkm},63$	$v_m = 892^m$	$E_m = 18^{tkm},26$	$v_m = 1465^m$	$E_m = 182^{tkm},72$
$[y]_m = 8^{km},5$	$[R] = 385$	$[y]_m = 37^{km},8$	$[R] = 188$	$[y]_m = 100^{km},5$	$[R] = 74$
$[R] = 2,5$	$[R] = 2212$	$[R] = 28,3$	$[R] = 5320$	$[R] = 148,3$	$[R] = 10974$
Projectiles coiffés					
$n = 0,4$	$10^{10}R' = 0,73164$	$n = 0,4$	$10^{10}R' = 0,0336$	$n = 0,4$	$10^{10}R' = 0,00403$
$\xi = 1,43$	$n\xi = 0,57$	$\xi = 1,41$	$n\xi = 0,56$	$\xi = 1,35$	$n\xi = 0,54$
$X_m' = 27^{km},7$	$\chi = 0,92$	$X_m' = 123^{km},9$	$\chi = 0,92$	$X_m' = 325^{km},1$	$\chi = 0,90$
$\omega_m' = 63^\circ 14'$	$u = 1,28$	$\omega_m' = 62^\circ 37'$	$u = 1,26$	$\omega_m' = 61^\circ 06'$	$u = 1,24$
$[v]_m' = 227^m$	$[E]_m' = 0^{tkm},18$	$[v]_m' = 482^m$	$[E]_m' = 5^{tkm},33$	$[v]_m' = 830^m$	$[E]_m' = 57^{tkm},99$
$[v]_m'' = 449^m$	$[E]_m'' = 0^{tkm},72$	$[v]_m'' = 931^m$	$[E]_m'' = 19^{tkm},88$	$[v]_m'' = 1510^m$	$[E]_m'' = 191^{tkm},93$
$[v]_m = 503^m$	$[E]_m = 0^{tkm},90$	$[v]_m = 1049^m$	$[E]_m = 25^{tkm},21$	$[v]_m = 1720^m$	$[E]_m = 249^{tkm},17$
$[R] = 3,5$	$[R] = 3098$	$[R] = 39,5$	$[R] = 7426$	$[R] = 201,2$	$[R] = 14889$

Les calculs indiquent les rendements extrêmes que l'on peut obtenir avec les canons de gros calibre et à très longues portées.

§ 160. Variation des éléments du tir avec l'altitude du lieu — Pour montrer l'influence de l'altitude du lieu d'expérience, établissons les Tables du canon 360 160 045 lançant sous l'angle de portée maximum $\alpha_m = 51^\circ 50'$ un projectile de 450^{kg} à la vitesse initiale de 1600^m , le calibre étant de 0,360 en des lieux de même latitude $\varphi = 45^\circ$ et aux diverses altitudes de 0^m, 1000^m et 2000^m.

$z = 0^m$		$z = 1000^m$		$z = 2000^m$	
Projectiles ordinaires					
$\Lambda = 0,000\ 112$	$N = 3\ 450$	$\Lambda = 0,000\ 112$	$N = 3\ 450$	$\Lambda = 0,000\ 112$	$N = 3\ 450$
$\Delta = 1,235$	$\Psi = 0,184$	$\Delta = 1,113$	$\Psi = 0,163$	$\Delta = 1,003$	$\Psi = 0,147$
$10^{10}K = 0,08781$	$\rho = 23,46$	$10^{10}K = 0,07010$	$\rho = 18,73$	$10^{10}K = 0,05697$	$\rho = 15,22$
$X_m = 86^{km},3$	$S = 1,94$	$X_m = 94^{km},2$	$S = 1,69$	$X_m = 102^{km},0$	$S = 1,49$
$T_m = 168^s$	$\omega_m = 64^\circ 39'$	$T_m = 175^s$	$\omega_m = 64^\circ 14'$	$T_m = 181^s$	$\omega_m = 63^\circ 49'$
$v'_m = 379^m$	$E'_m = 3^{tkm},29$	$v'_m = 401^m$	$E'_m = 3^{tkm},69$	$v'_m = 423^m$	$E'_m = 4^{tkm},30$
$v''_m = 800^m$	$E''_m = 14^{tkm},67$	$v''_m = 831^m$	$E''_m = 15^{tkm},86$	$v''_m = 860^m$	$E''_m = 16^{tkm},96$
$v_m = 885^m$	$E_m = 17^{tkm},96$	$v_m = 923^m$	$E_m = 19^{tkm},33$	$v_m = 958^m$	$E_m = 21^{tkm},06$
$[Y_s]_m = 37^{km},2$	$\mathcal{H} = 188$	$[Y_s]_m = 40^{km},1$	$\mathcal{H} = 188$	$[Y_s]_m = 42^{km},6$	$\mathcal{H} = 188$
$\mathcal{R} = 27,7$	$\mathcal{R} = 5\ 208$	$\mathcal{R} = 30,3$	$\mathcal{R} = 5\ 696$	$\mathcal{R} = 32,8$	$\mathcal{R} = 6\ 166$
Projectiles coiffés					
$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,035\ 12$	$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,028\ 04$	$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,022\ 79$
$\mathcal{Z} = 1,41$	$n\mathcal{Z} = 0,56$	$\mathcal{Z} = 1,39$	$n\mathcal{Z} = 0,55$	$\mathcal{Z} = 1,36$	$n\mathcal{Z} = 0,54$
$X'_m = 121^{km},7$	$\chi = 0,92$	$X'_m = 130^{km},9$	$\chi = 0,91$	$X'_m = 138^{km},7$	$\chi = 0,90$
$\omega'_m = 62^\circ 46'$	$v = 1,26$	$\omega'_m = 62^\circ 06'$	$v = 1,25$	$\omega'_m = 61^\circ 21'$	$v = 1,24$
$[V'_m]_m = 478^m$	$[E'_m]_m = 5^{tkm},24$	$[V'_m]_m = 501^m$	$[E'_m]_m = 5^{tkm},76$	$[V'_m]_m = 525^m$	$[E'_m]_m = 6^{tkm},33$
$[V''_m]_m = 927^m$	$[E''_m]_m = 19^{tkm},72$	$[V''_m]_m = 945^m$	$[E''_m]_m = 20^{tkm},49$	$[V''_m]_m = 962^m$	$[E''_m]_m = 21^{tkm},24$
$[V_m]_m = 1043^m$	$[E_m]_m = 24^{tkm},97$	$[V_m]_m = 1070^m$	$[E_m]_m = 26^{tkm},25$	$[V_m]_m = 1096^m$	$[E_m]_m = 27^{tkm},57$
$\mathcal{R}' = 39,0$	$\mathcal{R}' = 7\ 352$	$\mathcal{R}' = 41,5$	$\mathcal{R}' = 7\ 802$	$\mathcal{R}' = 43,7$	$\mathcal{R}' = 8\ 216$

Il résulte de ces calculs que, toutes choses égales d'ailleurs, le rendement d'un canon est d'autant meilleur que l'altitude du lieu d'expérience est plus élevée.

§ 161. Variation des éléments du tir avec la latitude du lieu — Pour montrer l'influence de la latitude du lieu d'expérience, établissons les Tables du canon 360 160 045, lançant sous l'angle de portée maximum $\alpha_m = 51^\circ 50'$ un projectile de 450^{kg} à la vitesse initiale de 1600^m , le calibre étant de 0,360, au niveau de la mer (1°) à l'équateur : $\varphi = 0^\circ$; 2°) à la latitude : $\varphi = 45^\circ$ et 3°) au pôle : $\varphi = 90^\circ$.

équateur : $\varphi = 0^\circ$		$\varphi = 45^\circ$		pôle : $\varphi = 90^\circ$	
Projectiles ordinaires					
$\Lambda = 0,000\ 112$	$N = 3\ 450$	$\Lambda = 0,000\ 112$	$N = 3\ 450$	$\Lambda = 0,000\ 112$	$N = 3\ 450$
$\Delta = 1,134$	$\Psi = 0,192$	$\Delta = 1,235$	$\Psi = 0,184$	$\Delta = 1,342$	$\Psi = 0,175$
$10^{10}K = 0,084\ 13$	$\rho = 22,48$	$10^{10}K = 0,08781$	$\rho = 23,46$	$10^{10}K = 0,09075$	$\rho = 24,25$
$X_m = 87^{km},8$	$S = 1,89$	$X_m = 86^{km},3$	$S = 1,94$	$X_m = 85^{km},1$	$S = 1,98$
$T_m = 169^s$	$\omega_m = 64^\circ 55'$	$T_m = 168^s$	$\omega_m = 64^\circ 39'$	$T_m = 167^s$	$\omega_m = 64^\circ 43'$
$v'_m = 383^m$	$E'_m = 3^{tkm},36$	$v'_m = 379^m$	$E'_m = 3^{tkm},29$	$v'_m = 375^m$	$E'_m = 3^{tkm},23$
$v''_m = 805^m$	$E''_m = 14^{tkm},89$	$v''_m = 800^m$	$E''_m = 14^{tkm},67$	$v''_m = 795^m$	$E''_m = 14^{tkm},50$
$v_m = 892^m$	$E_m = 18^{tkm},25$	$v_m = 885^m$	$E_m = 17^{tkm},96$	$v_m = 879^m$	$E_m = 17^{tkm},73$
$[Y_s] = 37^{km},8$	$\mathcal{H} = 188$	$[Y_s] = 37^{km},2$	$\mathcal{H} = 188$	$[Y_s] = 36^{km},8$	$\mathcal{H} = 188$
$\mathcal{R} = 28,2$	$\mathcal{R} = 5\ 302$	$\mathcal{R} = 27,7$	$\mathcal{R} = 5\ 208$	$\mathcal{R} = 27,5$	$\mathcal{R} = 5\ 170$

Projectiles coiffés.

$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,03365$	$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,03512$	$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,03630$
$\tilde{z} = 1,41$	$n\tilde{z} = 0,56$	$\tilde{z} = 1,41$	$n\tilde{z} = 0,56$	$\tilde{z} = 1,41$	$n\tilde{z} = 0,56$
$X'_m = 123^{km},8$	$\chi = 0,92$	$X'_m = 121^{km},7$	$\chi = 0,92$	$X'_m = 120^{km},0$	$\chi = 0,92$
$\omega'_m = 62^\circ 41'$	$u = 1,26$	$\omega'_m = 62^\circ 46'$	$u = 1,26$	$\omega'_m = 62^\circ 50'$	$u = 1,26$
$[V'_1]_m = 483^m$	$[E'_1]_m = 5^{tkm},35$	$[V'_1]_m = 478^m$	$[E'_1]_m = 5^{tkm},24$	$[V'_1]_m = 473^m$	$[E'_1]_m = 5^{tkm},13$
$[V''_1]_m = 933^m$	$[E''_1]_m = 19^{tkm},98$	$[V''_1]_m = 927^m$	$[E''_1]_m = 19^{tkm},72$	$[V''_1]_m = 922^m$	$[E''_1]_m = 19^{tkm},51$
$[V_1]_m = 1051^m$	$[E_1]_m = 25^{tkm},33$	$[V_1]_m = 1043^m$	$[E_1]_m = 24^{tkm},97$	$[V_1]_m = 1036^m$	$[E_1]_m = 24^{tkm},64$
$\mathcal{E} = 39,6$	$\mathcal{R}' = 7445$	$\mathcal{E} = 39,0$	$\mathcal{R}' = 7332$	$\mathcal{E} = 38,5$	$\mathcal{R}' = 7238$

Il résulte de ces calculs que, toutes choses égales d'ailleurs, le rendement d'un canon est d'autant meilleur que le lieu d'expérience est plus près de l'équateur.

§ 162. Tables de tir du canon 360 160 045 en différents lieux — Soit encore le canon 360 160 045 de calibre 0^m,360 lançant à la vitesse initiale de 1600^m un projectile de 450^{kg}, mais aux lieux

- ainsi désignés :
- | | | | |
|---------------------------------------|--------------|----|--------------------------|
| 1° A l'équateur en un point tel que : | $z = 4000^m$ | et | $\varphi = 0^\circ$, |
| 2° Au point Z pour lequel : | $z = 200^m$ | et | $\varphi = 49^\circ N$, |
| 3° Au pôle pour lequel : | $z = 0^m$ | et | $\varphi = 90^\circ$ |

l'angle de projection étant celui de plus grande portée : $\alpha_m = 51^\circ 50'$

Nous trouvons :

A l'équateur : $z = 4000^m$ $\varphi = 0^\circ$		Au point Z : $z = 200^m$ $\varphi = 49^\circ N$		Au pôle : $z = 0^m$ $\varphi = 90^\circ$	
Projectiles ordinaires					
$\Lambda = 0,000\,112$	$N' = 3\,450$	$\Lambda = 0,000\,112$	$N' = 3\,450$	$\Lambda = 0,000\,112$	$N' = 3\,450$
$\Delta = 0,773$	$\Psi = 0,128$	$\Delta = 1,216$	$\Psi = 0,179$	$\Delta = 1,342$	$\Psi = 0,175$
$10^{10}K = 0,038\,23$	$\rho = 10,22$	$10^{10}K = 0,083\,92$	$\rho = 22,42$	$10^{10}K = 0,090\,75$	$\rho = 24,25$
$X_m = 117^{km},8$	$S = 1,15$	$X_m = 87^{km},8$	$S = 1,887$	$X_m = 85^{km},1$	$S = 1,98$
$T_m = 193^s$	$\omega_m = 62^\circ 53'$	$T_m = 169^s$	$\omega_m = 64^\circ 35'$	$T_m = 167^s$	$\omega_m = 64^\circ 43'$
$V_m' = 469^m$	$E_m' = 5^{tkm},26$	$V_m' = 383^m$	$E_m' = 3^{tkm},36$	$V_m' = 375^m$	$E_m' = 3^{tkm},23$
$V_m'' = 915^m$	$E_m'' = 19^{tkm},22$	$V_m'' = 806^m$	$E_m'' = 14^{tkm},90$	$V_m'' = 795^m$	$E_m'' = 14^{tkm},50$
$V_m = 1028^m$	$E_m = 24^{tkm},26$	$V_m = 892^m$	$E_m = 18^{tkm},26$	$V_m = 879^m$	$E_m = 17^{tkm},73$
$[Y_s]_m = 48^{km},2$	$\mathcal{H} = 188$	$[Y_s]_m = 37^{km},8$	$\mathcal{H} = 188$	$[Y_s]_m = 36^{km},8$	$\mathcal{H} = 188$
$\mathcal{E} = 37,8$	$\mathcal{R} = 7\,106$	$\mathcal{E} = 28,3$	$\mathcal{R} = 5\,320$	$\mathcal{E} = 27,5$	$\mathcal{R} = 5\,170$
Projectiles coiffés					
$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,015\,29$	$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,033\,6$	$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,036\,30$
$\tilde{z} = 1,34$	$n\tilde{z} = 0,54$	$\tilde{z} = 1,41$	$n\tilde{z} = 0,56$	$\tilde{z} = 1,41$	$n\tilde{z} = 0,56$
$X_m' = 157^{km},9$	$\chi = 0,90$	$X_m' = 123^{km},9$	$\chi = 0,92$	$X_m' = 120^{km},0$	$\chi = 0,92$
$\omega_m' = 60^\circ 22'$	$u = 1,24$	$\omega_m' = 62^\circ 37'$	$u = 1,26$	$\omega_m' = 62^\circ 50'$	$u = 1,26$
$[V_1']_m = 582^m$	$[E_1']_m = 7^{tkm},77$	$[V_1']_m = 482^m$	$[E_1']_m = 5^{tkm},33$	$[V_1']_m = 473^m$	$[E_1']_m = 5^{tkm},13$
$[V_1'']_m = 1021^m$	$[E_1'']_m = 23^{tkm},92$	$[V_1'']_m = 931^m$	$[E_1'']_m = 19^{tkm},88$	$[V_1'']_m = 922^m$	$[E_1'']_m = 19^{tkm},51$
$[V_1]_m = 1175^m$	$[E_1]_m = 31^{tkm},70$	$[V_1]_m = 1049^m$	$[E_1]_m = 25^{tkm},21$	$[V_1]_m = 1036^m$	$[E_1]_m = 24^{tkm},64$
$\mathcal{E} = 50,0$	$\mathcal{R}' = 9\,400$	$\mathcal{E} = 39,5$	$\mathcal{R}' = 7\,426$	$\mathcal{E} = 38,5$	$\mathcal{R}' = 7\,238$

Il résulte de ces calculs que, toutes choses égales d'ailleurs, les éléments du tir et par suite le rendement d'un canon dépendent essentiellement de la situation géographique du lieu d'expérience.

Une table de tir n'est donc valable que pour la région pour laquelle on l'a calculée.

§ 163. Cable de tir du canon 520 240 167 tirant vers l'Ouest en un lieu dé-
tiri par $z = 4000^m$ et $\varphi = 0^\circ$ — Soit un canon dont le calibre est de $0^m,520$, lançant sous l'angle de
 portée maximum: $\alpha_m = 51^\circ 50'$, à la vitesse initiale de 2400^m un projectile de 1670^{kg} en un point
 de l'équateur d'altitude 4000^m et dans la direction de l'ouest. Par suite:

$$\begin{array}{llll} a = 0^m,520, & V = 2400^m, & p = 1670^{kg}, & \alpha_m = 51^\circ 50' \\ z = 4000^m, & \varphi = 0^\circ, & v = 270^\circ, & \Delta = 0^{kg},773 \end{array}$$

1° Le projectile est ordinaire. — Les paramètres sont alors:

$$\begin{array}{ll} \Lambda = \lambda \frac{a}{p} \sin \gamma = 0,33 \times 0,000162 = 0,000053, & \Psi_{45,45}^{\circ} = 0,081, \\ \Psi_{51,50,0^\circ}^{\circ} = 0,081 \times 1,045 \times 0,86 \times 0,667 = 0,0486, & \\ M = 5383, & N = 2691, & N' = 2691 \times \frac{1}{0,61795} - 5383 (1 - 0,61795) = 2298, \end{array}$$

il en résulte:

$$10^{10} R = 0,773 \times 2298 \times 0,0486 \times 0,000053 = 0,0045755$$

De plus:

$$\begin{array}{lll} V^2 = 5760000, & KV^2 = 0,0000026355, & 2KV^2 = 0,000005271, \\ V^4 = 331776000000, & KV^4 = 15,180411, & \rho = \frac{4KV^4}{g} = 6,1905, \\ \frac{p}{g} = 170,255, & 0,5 \frac{p}{g} = 85,128, & 0,25 \frac{p}{g} = 42,564, \end{array}$$

Les éléments du tir sont par suite:

$$X_m = 312844^m$$

d'où:

$$S = KV^2 X_m = 0,825,$$

et

$$\Phi = 0,4932, \quad \Omega = 1,4520, \quad T = 0,5361, \quad Z = 0,5097,$$

Nous trouvons successivement:

$$T_m = 311,2,$$

puis:

$$\lg \omega_m = 1,84738,$$

d'où:

$$\omega_m = 61^\circ 34',$$

$$\begin{array}{l} V'_m = 795^m, \\ E'_m = 53^{tkm},80 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} V''_m = 1469^m \\ E''_m = 183^{tkm},70 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} V_m = 1670^m \\ E_m = 237^{tkm},51 \end{array}$$

enfin:

$$C = 192,7$$

$$\begin{array}{l} [y_s]_m = 123270^m \\ \mathfrak{A}_m = 74 \end{array}$$

$$\mathfrak{R} = 14260$$

Les éléments correctifs sont:

$$\lg \theta = \frac{312844}{6371000} = 0,049073,$$

d'où:

$$\theta = 2^\circ 48',$$

par suite: d'après la Table du § 105

$$\partial X_m = 4^{tkm},7$$

puis les formules (388) donnent:

$$\partial_2 X_m = \frac{1}{6} g \cdot \frac{1}{13713} \times 311,2^3 = 3^{tkm},6$$

$$\partial_2 y = 7^{tkm},1 + 1^{tkm},6 = 8^{tkm},7$$

de sorte que d'après la Table du § 105

$$\partial_2 X_m = 5^{tkm},5;$$

et comme:

$$\partial_3 X_m = 1^{tkm},9$$

nous avons en définitive:

$$\partial X_m = 4^{tkm},7 + 3^{tkm},6 + 5^{tkm},5 + 1^{tkm},9 - 5^{tkm},9 = 9^{tkm},8$$

La portée corrigée est donc:

$$X_m \text{ corrigée} = 322^{tkm},6$$

2° Le projectile est coiffé. Supposons alors:

$$n = 0,4$$

nous avons:

$$10^{10} R' = 0,0045755 \times 0,4 = 0,0018302$$

puis

$$\xi = 1,285$$

et

$$n\xi = 0,514$$

il en résulte:

$$X_m' = 402^{tkm}$$

et comme:

$$S = 0,825$$

nous avons:

$$z = 1,13,$$

$$\chi = 0,95,$$

$$v = 1,38$$

$$\text{et } \sigma = 0,92$$

par conséquent:

$$T'_m = 311,2 \times 1,13 \times \sqrt{1,285} = 397,4$$

$$\lg \omega'_m = 1,84738 \times 0,95 = 1,75501$$

ce qui donne:

$$\omega'_m = 60^\circ 20'$$

puis

$$[V'_1]_m = 1097^m$$

$$[V''_1]_m = 1926^m$$

$$[V_1]_m = 2216^m$$

$$[E'_1]_m = 102^{tkm},44$$

$$[E''_1]_m = 315^{tkm},78$$

$$[E_1]_m = 418^{tkm},22$$

$$[y_s]_m = 123270 \times 0,92 \times 1,285 = 145730^m$$

$$C' = 289,9$$

$$H = 74,$$

$$H' = 21453$$

Les éléments correctifs sont, dans ce cas

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{402}{6371} = 0,06309,$$

$$\text{d'où : } \theta' = 3^{\circ}36',$$

la Table du §105 donne
puis les formules (388)

$$\partial_1 X'_m = 8^{km},3$$

$$\partial_2 X'_m = \frac{1,6348}{13,713} \times 62760094 = 7^{km},5$$

$$\partial_2 y = 11^{km},6 + 2^{km},7 = 14^{km},3$$

$$\partial_4 X'_m = 9^{km},7$$

d'où nous déduisons :

et comme :

$$\partial_0 X'_m = 2^{km},8$$

et

$$\partial_4 X'_m = -9^{km},2$$

nous avons en définitive :

$$\partial X'_m = 8,3 + 7,5 + 14,3 + 2,8 - 9,2 = 23^{km},7$$

La portée corrigée est donc :

$$X'_m \text{ corrigé} = 425^{km},7$$

Chapitre XXV

Tables de tir générales

§ 164. Exposé — Dans le présent chapitre nous nous proposons de calculer non pas tous les éléments du tir, mais ceux qui permettent d'obtenir l'effet utile d'un coup de canon et le rendement effectif de ce canon, quand celui-ci tire sous l'angle de portée maximum : $\alpha = 51^{\circ}50'$

A cet effet nous ferons usage des formules

$$X'_m = \frac{1}{2RV^2} \left(\sqrt{1 + 0,39625 RV^2} - 1 \right) \quad (510)$$

$$\operatorname{tg} \omega_m = 1,27230 \Omega$$

$$(511)$$

$$v_m = VY \times \frac{0,61795}{\cos \omega}$$

$$(512)$$

$$E_m = 0,5 \frac{p}{g} v_m^2 \quad (513)$$

mais, comme nous supposons que la moitié seulement de l'énergie E_m du projectile est transformée en travail, l'autre moitié étant transformée en chaleur, nous donnons dans les Tables qui suivent les valeurs de $\frac{1}{2} E_m = 0,25 \frac{p}{g} v_m^2$. Les Tables sont calculées pour des projectiles ordinaires et pour des projectiles coiffés et chanfreinés, en supposant $n = 0,4$. Rappelons enfin les formules.

$$C = \sqrt{X'_m \times E_m \times 0,0005} \quad (514)$$

$$H = \frac{500}{V^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{10}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} \quad (515)$$

$$H' = H \times C \quad (516)$$

Les vitesses initiales sont supposées successivement égales à 800^m, 1200^m, 1600^m, 2000^m et 2400^m.

La Table ci-dessous indique les calibres des canons et les poids des projectiles pour lesquels nous avons établi les Tables de Tir. Les projectiles dont les poids figurent dans les deux dernières colonnes sont hétérogènes, et sans explosifs, conformes aux indications données dans la seconde Thèse. Dans les Tables ces poids sont soulignés.

α		Poids des Projectiles ~								Hypothèses.
α		P	Homogènes					Hétérogènes		
			70 ^{kg}	80 ^{kg}	90 ^{kg}	100 ^{kg}	110 ^{kg}	120 ^{kg}	130 ^{kg}	
Hypothèses: $\alpha = 51^{\circ}50'$ $z = 0^m$ $\varphi = 45^{\circ}N$ $\Delta = 1^{kg}235$	Calibres des canons	0 ^m ,200	70 ^{kg}	80 ^{kg}	90 ^{kg}	100 ^{kg}	110 ^{kg}	120 ^{kg}	130 ^{kg}	$\alpha = 51^{\circ}50'$ $z = 0^m$ $\varphi = 45^{\circ}N$ $\Delta = 1^{kg}235$
		0,240	140	155	170	185	200	215	230	
		0,280	200	225	250	275	300	325	350	
		0,320	260	300	340	380	420	460	500	
		0,360	330	390	450	510	570	630	690	
		0,400	420	505	590	675	760	845	930	
		0,440	540	655	770	885	1000	1115	1230	
		0,480	700	850	1000	1150	1300	1450	1600	
		0,520	910	1100	1290	1480	1670	1860	2050	

$\alpha = 51^{\circ} 50'$, $z = 0^m$ Canon de 0^m 200. $\varphi = 45^{\circ} N$, $\Delta = 1,235$

V	N ^{os} d'ordre	Types des canons	p	$\mathcal{H}$	Projectiles ordinaires				Projectiles coiffés			
					X_m	$0,5 E_m$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{H}$	X'_m	$0,5 [E'_m]$	$\mathcal{C}'$	$\mathcal{H}'$
1	800 ^m	1 200 080 007	70 ²⁶	885	19,0 ^{km}	0,31 ^{Ek_m}	2,4	2 124	27,2 ^{km}	0,43 ^{Ek_m}	3,4	3 009
	"	2 200 080 008	80	856	20,2	0,37	2,7	2 311	28,8	0,52	3,9	3 338
	"	3 200 080 009	90	831	21,4	0,44	3,1	2 576	30,2	0,61	4,3	3 573
	"	4 200 080 010	100	810	22,4	0,51	3,4	2 754	31,4	0,70	4,7	3 807
	"	5 200 080 011	110	791	23,4	0,59	3,7	2 927	32,4	0,79	5,1	4 034
	"	6 200 080 012	<u>120</u>	774	24,4	0,67	4,0	3 096	33,4	0,89	5,5	4 257
	"	7 200 080 013	<u>130</u>	759	25,2	0,75	4,3	3 264	34,4	0,99	5,8	4 402
2	1200 ^m	8 200 120 007	70	650	34,6	0,57	4,4	2 860	50,5	0,82	6,4	4 160
	"	9 200 120 008	80	628	37,2	0,70	5,1	3 203	53,9	1,00	7,3	4 584
	"	10 200 120 009	90	610	39,8	0,83	5,7	3 477	57,3	1,18	8,2	5 002
	"	11 200 120 010	100	595	42,2	0,98	6,4	3 808	60,6	1,37	9,1	5 415
	"	12 200 120 011	110	581	44,6	1,13	7,1	4 125	63,8	1,58	10,0	5 810
	"	13 200 120 012	<u>120</u>	568	46,9	1,29	7,8	4 430	66,7	1,80	11,0	6 248
	"	14 200 120 013	<u>130</u>	557	49,1	1,46	8,5	4 735	69,2	2,03	11,9	6 628
3	1600 ^m	15 200 160 007	70	540	53,1	0,84	6,7	3 618	78,6	1,28	10,0	5 400
	"	16 200 160 008	80	523	58,7	1,10	8,0	4 184	86,3	1,59	11,7	6 119
	"	17 200 160 009	90	508	64,2	1,36	9,3	4 724	93,7	1,93	13,5	6 858
	"	18 200 160 010	100	494	69,2	1,62	10,6	5 236	100,4	2,29	15,2	7 509
	"	19 200 160 011	110	482	73,8	1,89	11,8	5 688	106,5	2,67	16,9	8 146
	"	20 200 160 012	<u>120</u>	471	78,2	2,18	13,1	6 170	111,9	3,06	18,6	8 761
	"	21 200 160 013	<u>130</u>	464	82,3	2,48	14,3	6 592	116,9	3,46	20,2	9 312
4	2000 ^m	22 200 200 007	70	470	75,9	1,26	9,8	4 606	113,1	2,19	15,7	7 379
	"	23 200 200 008	80	455	84,5	1,59	11,6	5 278	125,1	2,72	18,4	8 372
	"	24 200 200 009	90	441	92,5	1,95	13,4	6 009	136,0	3,28	21,1	9 305
	"	25 200 200 010	100	430	100,1	2,34	15,3	6 579	146,1	3,89	23,8	10 234
	"	26 200 200 011	110	420	107,3	2,75	17,2	7 224	155,6	4,54	26,5	11 130
	"	27 200 200 012	<u>120</u>	411	114,1	3,18	19,0	7 809	164,3	5,19	29,2	12 001
	"	28 200 200 013	<u>130</u>	403	120,5	3,63	20,9	8 423	172,3	5,89	31,9	12 856
5	2400 ^m	29 200 240 007	70	423	102,6	1,71	13,2	5 584	153,2	2,49	19,5	8 249
	"	30 200 240 008	80	409	114,7	2,16	15,8	6 462	169,2	3,16	23,1	9 448
	"	31 200 240 009	90	398	126,4	2,66	18,3	7 283	184,6	3,83	26,6	10 587
	"	32 200 240 010	100	387	136,9	3,20	20,9	8 088	199,1	4,57	30,2	11 687
	"	33 200 240 011	110	378	146,5	3,77	23,4	8 855	212,3	5,33	33,6	12 701
	"	34 200 240 012	<u>120</u>	370	155,1	4,36	26,0	9 620	224,6	6,11	37,0	13 690
	"	35 200 240 013	<u>130</u>	363	163,0	4,97	28,5	10 346	235,2	6,91	40,4	14 665

$\alpha = 51^\circ 50'$, $z = 0''$

Canon de 0,240.

 $\varphi = 45^\circ N$, $\Delta = 1,235$

V	N ^o d'ordre	Types des canons	p	$\mathcal{H}$	Projectiles ordinaires				Projectiles coiffés				
					X_m	$0,5 E_m$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{H}$	X'_m	$0,5 E'_m$	$\mathcal{C}'$	$\mathcal{H}'$	
6	800 ^m	36	240 080 014	140 ^{kg}	619	22,2 ^{km}	0,7 ^{km}	3,9	2414	31,1 ^{km}	1,0 ^{km}	5,6	3466
	"	37	240 080 015,5	155	603	23,2	0,8	4,4	2653	32,2	1,1	6,0	3618
	"	38	240 080 017	170	590	24,2	1,0	4,9	2891	33,3	1,3	6,5	3835
	"	39	240 080 018,5	185	578	25,1	1,1	5,3	3063	34,4	1,4	6,9	3988
	"	40	240 080 020	200	567	26,0	1,2	5,6	3175	35,4	1,5	7,3	4139
	"	41	240 080 021,5	<u>215</u>	557	26,9	1,3	6,0	3342	36,3	1,7	7,8	4345
	"	42	240 080 023	<u>230</u>	547	27,7	1,5	6,4	3501	37,1	1,9	8,4	4595
7	1200	43	240 120 014	140	455	41,6	1,4	7,6	3458	59,9	2,0	10,9	4960
	"	44	240 120 015,5	155	444	44,0	1,6	8,4	3730	62,9	2,2	11,8	5239
	"	45	240 120 017	170	434	46,4	1,8	9,2	3993	65,8	2,5	12,8	5555
	"	46	240 120 018,5	185	425	48,7	2,1	10,1	4293	68,5	2,8	13,9	5908
	"	47	240 120 020	200	416	50,9	2,4	10,9	4534	70,9	3,2	15,0	6240
	"	48	240 120 021,5	<u>215</u>	408	53,0	2,6	11,7	4774	73,2	3,6	16,2	6610
	"	49	240 120 023	<u>230</u>	401	55,0	2,9	12,6	5053	75,4	3,9	17,3	6937
8	1600	50	240 160 014	140	379	67,9	2,2	12,2	4524	98,5	3,1	17,5	6633
	"	51	240 160 015,5	155	369	72,8	2,6	13,8	5092	104,8	3,7	19,7	7269
	"	52	240 160 017	170	361	77,4	3,1	15,4	5559	110,7	4,3	21,8	7810
	"	53	240 160 018,5	185	353	81,8	3,5	16,9	5966	116,3	4,9	23,9	8437
	"	54	240 160 020	200	346	86,0	4,0	18,5	6401	121,6	5,5	25,9	8961
	"	55	240 160 021,5	<u>215</u>	340	90,0	4,5	20,1	6834	126,3	6,2	28,0	9520
	"	56	240 160 023	<u>230</u>	335	93,8	5,0	21,7	7270	130,5	6,9	30,0	10050
9	2000	57	240 200 014	140	330	98,1	3,2	17,7	5841	143,2	4,6	25,7	8481
	"	58	240 200 015,5	155	322	105,3	3,8	20,0	6440	153,0	5,4	28,8	9273
	"	59	240 200 017	170	315	112,3	4,5	22,4	7056	162,3	6,3	31,9	10049
	"	60	240 200 018,5	185	308	119,0	5,1	24,7	7608	171,2	7,2	34,9	10749
	"	61	240 200 020	200	302	125,5	5,8	27,0	8154	179,6	8,0	37,9	11450
	"	62	240 200 021,5	<u>215</u>	297	131,8	6,6	29,4	8732	187,1	8,9	40,8	12118
	"	63	240 200 023	<u>230</u>	292	137,8	7,3	31,7	9256	194,4	9,8	43,7	12760
10	2400	64	240 240 014	140	297	133,2	4,4	24,2	7187	195,8	6,5	35,7	11103
	"	65	240 240 015,5	155	290	143,6	5,2	27,4	7946	209,7	7,6	39,9	11571
	"	66	240 240 017	170	283	153,4	6,1	30,6	8660	222,7	8,7	44,0	12452
	"	67	240 240 018,5	185	277	162,5	7,0	33,7	9335	234,7	9,9	48,2	13351
	"	68	240 240 020	200	272	171,1	7,9	36,8	10010	245,2	11,2	52,3	14225
	"	69	240 240 021,5	<u>215</u>	267	179,1	8,9	39,9	10752	254,2	12,5	56,3	15032
	"	70	240 240 023	<u>230</u>	262	186,5	9,9	43,0	11266	262,2	13,8	60,2	15772

$\gamma_m = 51^\circ 50'$, $z = 0^\circ$

Cannon de 0,280.

 $\varphi = 45^\circ N$, $\Delta = 1,235$

V	N ^{os} d'ordre	Types des canons.	p	$\mathcal{R}$	Projectiles ordinaires				Projectiles coiffés.				
					X_m	0,5 E_m	$\mathcal{C}$	$\mathcal{R}$	X'_m	0,5 $[E'_m]$	$\mathcal{C}'$	$\mathcal{R}'$	
11	800 ^m	71	280 080 020	200 ^{kg}	485	23 ^{km}	1 ^{km} ,0	4,8	2 328	32 ^{km}	1 ^{km} ,4	6,7	3 250
	"	72	280 080 022,5	225	471	24	1,2	5,4	2 543	33	1,7	7,4	3 485
	"	73	280 080 025	250	459	25	1,4	6,0	2 754	34	1,9	8,1	3 718
	"	74	280 080 027,5	275	449	26	1,7	6,6	2 963	36	2,2	8,8	3 951
	"	75	280 080 030	300	439	27	1,9	7,1	3 107	37	2,5	9,5	4 214
	"	76	280 080 032,5	<u>325</u>	430	28	2,1	7,7	3 311	38	2,8	10,3	4 429
	"	77	280 080 035	<u>350</u>	422	29	2,3	8,2	3 460	39	3,1	11,0	4 642
12	1200	78	280 120 020	200	337	43	2,0	9,3	3 320	61	2,9	13,3	4 748
	"	79	280 120 022,5	225	346	46	2,4	10,5	3 633	65	3,4	14,9	5 155
	"	80	280 120 025	250	337	49	2,8	11,7	3 943	68	4,0	16,4	5 527
	"	81	280 120 027,5	275	329	51	3,2	12,9	4 244	71	4,5	17,9	5 889
	"	82	280 120 030	300	322	54	3,7	14,1	4 540	74	5,1	19,3	6 215
	"	83	280 120 032,5	<u>325</u>	316	56	4,2	15,3	4 835	77	5,7	20,8	6 573
	"	84	280 120 035	<u>350</u>	310	58	4,7	16,5	5 115	79	6,2	22,2	6 882
13	1600	85	280 160 020	200	297	70	3,3	15,1	4 485	102	4,7	21,9	6 504
	"	86	280 160 022,5	225	288	76	4,0	17,4	5 011	109	5,6	24,8	7 142
	"	87	280 160 025	250	281	82	4,7	19,6	5 508	116	6,6	27,7	7 784
	"	88	280 160 027,5	275	274	87	5,5	21,9	6 001	122	7,6	30,5	8 357
	"	89	280 160 030	300	268	92	6,3	24,1	6 459	127	8,7	33,3	8 924
	"	90	280 160 032,5	<u>325</u>	263	96	7,2	26,3	6 917	133	9,8	36,1	9 494
	"	91	280 160 035	<u>350</u>	258	101	8,1	28,6	7 379	138	10,9	38,8	10 010
14	2000	92	280 200 020	200	259	102	4,8	22,1	5 724	148	6,8	31,7	8 210
	"	93	280 200 022,5	225	251	111	5,8	25,4	6 375	160	8,3	36,3	9 111
	"	94	280 200 025	250	245	119	6,9	28,7	7 032	170	9,8	40,8	9 996
	"	95	280 200 027,5	275	239	127	8,1	32,0	7 648	180	11,5	45,4	10 851
	"	96	280 200 030	300	234	134	9,3	35,3	8 260	189	13,2	49,9	11 677
	"	97	280 200 032,5	<u>325</u>	229	141	10,6	38,7	8 862	197	14,9	54,2	12 412
	"	98	280 200 035	<u>350</u>	225	148	11,9	42,0	9 450	205	16,6	58,4	13 140
15	2400	99	280 240 020	200	232	139	6,6	30,3	7 030	203	9,4	43,7	10 138
	"	100	280 240 022,5	225	226	151	8,0	34,7	7 842	219	11,4	50,0	11 300
	"	101	280 240 025	250	220	162	9,4	39,1	8 602	233	13,5	56,1	12 342
	"	102	280 240 027,5	275	215	172	10,9	43,4	9 331	246	15,6	62,0	13 330
	"	103	280 240 030	300	210	181	12,6	47,8	10 038	259	17,8	67,9	14 259
	"	104	280 240 032,5	<u>325</u>	206	190	14,4	52,2	10 753	270	20,1	73,7	15 182
	"	105	280 240 035	<u>350</u>	202	198	16,1	56,5	11 413	280	22,5	79,4	16 039

$\alpha = 51^\circ 50'$, $z = 0''$

Cannon de 0,320

 $\varphi = 45^\circ N$, $\Delta = 1,235$

V	N° d'ordre	Types des canons	p	$\mathcal{R}$	Projectiles ordinaires				Projectiles coiffés			
					X_m	$0,5 E_m$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{R}$	X'_m	$0,5 [E]_m$	$\mathcal{C}'$	$\mathcal{R}'$
16	800 ^m	106 320 080 026	260	403	22 ^{km}	1,4	5,6	2257	31 ^{km}	1,9	7,7	3103
"	107	320 080 030	300	384	24	1,7	6,4	2458	33	2,3	8,7	3341
"	108	320 080 034	340	371	26	2,0	7,2	2671	35	2,7	9,7	3598
"	109	320 080 038	380	360	27	2,3	7,9	2844	36	3,2	10,7	3852
"	110	320 080 042	420	352	28	2,7	8,6	3027	37	3,7	11,7	4118
"	111	320 080 046	<u>460</u>	345	29	3,0	9,3	3209	39	4,1	12,6	4347
"	112	320 080 050	<u>500</u>	339	30	3,4	10,1	3424	40	4,6	13,6	4610
17	1200	113 320 120 026	260	293	42	2,6	10,4	3047	61	3,6	14,8	4336
"	114	320 120 030	300	282	46	3,2	12,2	3440	66	4,4	17,1	4822
"	115	320 120 034	340	272	50	3,9	14,0	3808	70	5,3	19,3	5250
"	116	320 120 038	380	264	53	4,6	15,7	4145	73	6,3	21,4	5650
"	117	320 120 042	420	259	56	5,4	17,4	4507	76	7,2	23,4	6061
"	118	320 120 046	<u>460</u>	255	59	6,2	19,1	4871	79	8,2	25,4	6477
"	119	320 120 050	<u>500</u>	251	61	7,0	20,7	5196	82	9,2	27,4	6877
18	1600	120 320 160 026	260	244	70	4,2	17,2	4197	101	6,0	24,5	5978
"	121	320 160 030	300	235	77	5,4	20,4	4794	110	7,5	28,8	6768
"	122	320 160 034	340	227	84	6,6	23,5	5335	119	9,2	33,1	7514
"	123	320 160 038	380	221	90	7,9	26,7	5901	126	11,0	37,2	8221
"	124	320 160 042	420	216	96	9,2	29,8	6437	132	12,8	41,2	8899
"	125	320 160 046	<u>460</u>	211	101	10,7	32,8	6921	138	14,7	45,1	9516
"	126	320 160 050	<u>500</u>	207	106	12,2	35,9	7431	144	16,7	49,0	10143
19	2000	127 320 200 026	260	213	101	6,2	25,0	5425	146	8,9	36,0	7666
"	128	320 200 030	300	205	113	7,8	29,7	6089	163	11,1	42,5	8713
"	129	320 200 034	340	199	123	9,6	34,3	6826	176	13,3	48,3	9612
"	130	320 200 038	380	193	132	11,5	38,9	7508	187	15,5	53,9	10403
"	131	320 200 042	420	188	140	13,6	43,8	8234	196	18,0	59,4	11167
"	132	320 200 046	<u>460</u>	184	148	15,9	48,5	8924	204	20,6	64,9	11942
"	133	320 200 050	<u>500</u>	180	155	18,2	53,1	9558	212	23,4	70,4	12672
20	2400	134 320 240 026	260	193	138	8,3	33,8	6523	201	11,9	48,9	9438
"	135	320 240 030	300	185	152	10,7	40,3	7456	220	15,2	57,9	10712
"	136	320 240 034	340	179	166	13,2	46,7	8359	239	18,6	66,7	11939
"	137	320 240 038	380	174	179	15,7	53,0	9222	256	22,0	75,0	13050
"	138	320 240 042	420	170	190	18,3	59,0	10030	270	25,4	82,8	14076
"	139	320 240 046	<u>460</u>	166	200	21,0	64,8	10757	281	28,9	90,1	14957
"	140	320 240 050	<u>500</u>	163	208	23,8	70,4	11475	289	32,4	96,8	15778

$\varphi = 51^{\circ}50'$, $\alpha = 0^{\circ}$ Canon de 0^m360. $\varphi = 45^{\circ}N$, $\Delta = 1,235$

V	N ^o d'ordre	Types des canons	p	$\frac{S}{H}$	Projectiles ordinaires				Projectiles coiffés.			
					X_m	$0,5E_m$	E	$\frac{S}{H}$	X'_m	$0,5[E'_m]$	E'	$\frac{S'}{H'}$
21	800 ^m	141 360 080 033	330 ^{kg}	333	23 ^{km}	1 ^{kg} 7	6,3	2098	31 ^{km}	2 ^{kg} 2	8,3	2763
	"	142 360 080 039	390	320	24	2,2	7,3	2336	33	2,8	9,6	3072
	"	143 360 080 045	450	309	26	2,7	8,4	2596	35	3,5	11,1	3430
	"	144 360 080 051	510	299	27	3,2	9,4	2811	37	4,2	12,5	3738
	"	145 360 080 057	570	291	29	3,8	10,4	3006	38	4,9	13,8	4016
	"	146 360 080 063	<u>630</u>	284	30	4,3	11,4	3238	40	5,7	15,1	4288
	"	147 360 080 069	<u>690</u>	278	31	4,9	12,4	3447	41	6,4	16,3	4531
22	1200	148 360 120 033	330	245	43	3,3	11,9	2916	61	4,6	16,8	4116
	"	149 360 120 039	390	235	47	4,3	14,2	3337	66	5,8	19,6	4606
	"	150 360 120 045	450	227	51	5,3	16,5	3746	71	7,0	22,3	5062
	"	151 360 120 051	510	220	55	6,4	18,8	4136	75	8,4	25,1	5522
	"	152 360 120 057	570	214	58	7,6	21,0	4494	79	9,8	27,8	5949
	"	153 360 120 063	<u>630</u>	209	61	8,8	23,2	4849	82	11,2	30,4	6354
	"	154 360 120 069	<u>690</u>	204	64	10,1	25,4	5182	86	12,7	33,0	6732
23	1600	155 360 160 033	330	204	70	5,4	19,4	3958	102	7,6	27,8	5671
	"	156 360 160 039	390	195	78	7,1	23,5	4583	112	9,8	33,2	6474
	"	157 <u>360 160 045</u>	450	188	86	8,9	27,7	5208	122	12,2	38,6	7257
	"	158 360 160 051	510	183	93	11,0	31,9	5838	130	14,9	44,0	8052
	"	159 360 160 057	570	178	99	13,1	36,0	6408	137	17,6	49,1	8740
	"	160 360 160 063	<u>630</u>	173	106	15,3	40,2	6955	143	20,3	53,9	9325
	"	161 360 160 069	<u>690</u>	169	112	17,5	44,3	7487	149	23,1	58,7	9920
24	2000	162 360 200 033	330	178	102	7,9	22,7	4911	149	11,6	41,7	7423
	"	163 360 200 039	390	170	115	10,4	34,2	5814	165	15,0	49,7	8449
	"	164 360 200 045	450	164	126	13,2	40,6	6658	179	18,6	57,7	9463
	"	165 360 200 051	510	159	137	16,1	47,0	7473	192	22,4	65,7	10446
	"	166 360 200 057	570	155	148	19,3	53,5	8293	204	26,4	73,8	11439
	"	167 360 200 063	<u>630</u>	151	158	22,8	60,1	9075	216	30,8	81,8	12372
	"	168 360 200 069	<u>690</u>	148	168	26,6	66,8	9886	227	35,5	89,9	13305
25	2400	169 360 240 033	330	160	139	10,7	38,6	6176	203	15,3	56,6	9056
	"	170 360 240 039	390	153	154	14,2	46,8	7160	223	20,0	66,8	10220
	"	171 360 240 045	450	148	170	17,8	55,0	8140	243	24,7	77,5	11470
	"	172 360 240 051	510	143	185	21,7	63,2	9038	262	29,7	88,2	12613
	"	173 360 240 057	570	139	197	25,8	71,3	9911	277	34,9	98,3	13664
	"	174 360 240 063	<u>630</u>	136	208	30,2	79,3	10785	289	40,2	107,8	14661
	"	175 360 240 069	<u>690</u>	133	217	35,1	87,3	11611	298	45,6	116,6	15508

$\gamma = 31^\circ 50'$
 $z = 0^m$

Canon de 0,400

 $\varphi = 45^\circ N$, $\Delta = 1,235^{kg}$

V	N° d'ordre.	Types des canons			p	$\frac{H}{100}$	Projectiles ordinaires				Projectiles coffrés.			
							X_m	0,5 E_m	E	$\frac{H}{100}$	X'_m	0,5 $[E]_m$	E'	$\frac{H'}{100}$
26	800 ^m	176	400	080 042	420 ^{kg}	283	23 ^{km}	2,2	7,1	2 009	32 ^{km}	2,9	9,5	2 689
"	177	400	080 050,5	505	270	25	2,9	8,5	2 295	34	3,7	11,2	3 022	
"	178	400	080 059	590	260	27	3,6	9,9	2 574	36	4,6	12,9	3 354	
"	179	400	080 067,5	675	251	28	4,4	11,2	2 811	38	5,6	14,6	3 665	
"	180	400	080 076	760	244	30	5,2	12,5	3 050	39	6,6	16,1	3 928	
"	181	400	080 084,5	<u>845</u>	237	31	6,0	13,7	3 246	41	7,6	17,6	4 171	
"	182	400	080 093	<u>930</u>	231	32	6,8	14,8	3 419	42	8,6	19,0	4 389	
27	1200	183	400	120 042	420	207	43	4,2	13,4	2 774	62	5,9	19,1	3 954
"	184	400	120 050,5	505	198	48	5,6	16,4	3 247	68	7,7	22,8	4 514	
"	185	400	120 059	590	191	53	7,1	19,4	3 705	73	9,5	26,4	5 042	
"	186	400	120 067,5	675	185	57	8,8	22,3	4 126	78	11,5	30,0	5 550	
"	187	400	120 076	760	179	60	10,5	25,2	4 511	82	13,6	33,4	5 979	
"	188	400	120 084,5	<u>845</u>	174	64	12,3	28,1	4 889	86	15,7	36,7	6 386	
"	189	400	120 093	<u>930</u>	170	67	14,2	30,9	5 253	89	17,7	39,8	6 766	
28	1600	190	400	160 042	420	172	71	7,0	22,3	3 836	103	9,8	31,8	5 470
"	191	400	160 050,5	505	165	81	9,5	27,8	4 587	115	13,1	38,8	6 402	
"	192	400	160 059	590	159	90	12,2	33,2	5 279	125	16,7	45,6	7 250	
"	193	400	160 067,5	675	153	98	15,1	38,5	5 891	134	20,5	52,4	8 017	
"	194	400	160 076	760	149	104	18,2	43,6	6 496	141	24,3	58,6	8 731	
"	195	400	160 084,5	<u>845</u>	145	110	21,3	48,5	7 033	148	28,1	64,5	9 353	
"	196	400	160 093	<u>930</u>	142	116	24,5	53,5	7 597	154	31,9	70,2	9 968	
29	2000	197	400	200 042	420	150	104	10,2	32,6	4 890	151	14,1	46,1	6 915
"	198	400	200 050,5	505	144	118	13,9	40,5	5 832	169	18,9	56,5	8 136	
"	199	400	200 059	590	138	131	17,9	48,4	6 679	185	24,2	66,9	9 232	
"	200	400	200 067,5	675	134	142	22,2	56,2	7 531	199	29,9	77,1	10 331	
"	201	400	200 076	760	130	153	26,7	63,9	8 307	211	35,8	86,9	11 297	
"	202	400	200 084,5	<u>845</u>	126	163	31,5	71,7	9 034	222	42,0	96,4	12 146	
"	203	400	200 093	<u>930</u>	123	172	36,6	79,3	9 754	230	48,5	105,6	12 989	
30	2400	204	400	240 042	420	134	141	13,8	44,1	5 909	205	19,4	63,1	8 455
"	205	400	240 050,5	505	129	160	19,0	55,1	7 108	230	26,5	78,1	10 075	
"	206	400	240 059	590	124	178	24,3	65,8	8 159	253	33,8	92,5	11 470	
"	207	400	240 067,5	675	120	193	29,9	76,0	9 120	272	41,2	105,8	12 696	
"	208	400	240 076	760	117	204	35,7	85,8	10 039	286	49,0	118,4	13 853	
"	209	400	240 084,5	<u>845</u>	114	215	42,0	95,3	10 864	298	57,1	130,4	14 866	
"	210	400	240 093	<u>930</u>	111	226	48,4	104,7	11 622	309	65,5	142,3	15 784	

$\alpha_m = 51^\circ 50'$, $z = 0^m$

Canon de 0,440.

 $\varphi = 45^\circ N$, $\Delta = 1^{\text{kg}} 235$

V	N° d'ordre.	Types des canons	p	$\mathfrak{P}$	Projectiles ordinaires				Projectiles coiffés.			
					X_m	$0,5 E_m$	E	$\mathfrak{P}$	X'_m	$0,5 [E]_m$	E'	$\mathfrak{P}'$
31	800 ^m	211 440 080 054	540 ^{kg}	241	24 ^{km}	2 ^{tkm} 9	8,5	2 000	33 ^{km}	4 ^{tkm} 0	11,5	2 772
	"	212 440 080 065,5	655	230	26	3,9	10,1	2 323	35	5,5	13,6	3 128
	"	213 440 080 077	770	221	28	4,9	11,7	2 586	37	6,6	15,6	3 448
	"	214 440 080 088,5	885	213	29	5,9	13,2	2 812	39	8,0	17,7	3 770
	"	215 440 080 100	1 000	207	31	7,1	14,8	3 064	41	9,6	19,8	4 099
	"	216 440 080 111,5	1 115	201	32	8,3	16,3	3 276	42	11,2	21,8	4 382
	"	217 440 080 123	1 230	195	34	9,5	17,9	3 491	44	12,9	23,8	4 644
32	1 200	218 440 120 054	540	177	45	5,6	15,9	2 814	64	7,7	22,2	3 929
	"	219 440 120 065,5	655	169	50	7,6	19,5	3 296	70	10,3	27,0	4 563
	"	220 440 120 077	770	162	55	9,7	23,1	3 742	75	13,2	31,6	5 119
	"	221 440 120 088,5	885	157	59	12,0	26,6	4 176	80	16,2	36,0	5 652
	"	222 440 120 100	1 000	152	63	14,5	30,2	4 590	84	19,3	40,3	6 126
	"	223 440 120 111,5	1 115	147	67	17,1	33,8	4 969	88	22,6	44,6	6 556
	"	224 440 120 123	1 230	143	71	19,9	37,6	5 377	93	26,1	48,8	6 978
33	1 600	225 440 160 054	540	147	75	9,3	26,4	3 881	107	13,1	37,4	5 498
	"	226 440 160 065,5	655	140	85	12,8	33,0	4 620	120	17,9	46,4	6 496
	"	227 440 160 077	770	135	94	16,7	39,5	5 333	130	23,0	54,7	7 385
	"	228 440 160 088,5	885	130	102	20,7	45,9	5 967	139	28,2	62,6	8 138
	"	229 440 160 100	1 000	126	109	25,0	52,2	6 577	148	33,6	70,5	8 883
	"	230 440 160 111,5	1 115	122	116	29,3	58,3	7 113	156	39,2	78,2	9 540
	"	231 440 160 123	1 230	118	123	33,6	64,3	7 587	164	45,0	85,9	10 136
34	2 000	232 440 200 054	540	129	108	13,6	38,3	4 941	157	18,9	54,5	7 031
	"	233 440 200 065,5	655	123	124	18,8	48,3	5 941	177	25,9	67,7	8 327
	"	234 440 200 077	770	118	137	24,4	57,9	6 832	193	33,6	80,5	9 499
	"	235 440 200 088,5	885	114	149	30,5	67,4	7 684	207	41,8	93,0	10 602
	"	236 440 200 100	1 000	110	160	37,0	76,9	8 459	219	50,5	105,1	11 561
	"	237 440 200 111,5	1 115	107	171	43,7	86,4	9 245	231	59,4	117,0	12 519
	"	238 440 200 123	1 230	104	181	50,7	95,8	9 963	241	68,5	128,5	13 364
35	2 400	239 440 240 054	540	116	147	18,6	52,2	6 055	214	26,2	74,9	8 688
	"	240 440 240 065,5	655	110	168	25,4	65,4	7 194	242	35,5	92,7	10 197
	"	241 440 240 077	770	106	186	33,2	78,5	8 321	264	45,9	110,1	11 671
	"	242 440 240 088,5	885	102	202	41,4	91,4	9 323	283	56,9	126,8	12 934
	"	243 440 240 100	1 000	99	216	50,0	104,0	10 296	299	68,1	142,7	14 127
	"	244 440 240 111,5	1 115	96	230	58,8	116,3	11 165	314	79,5	158,0	15 168
	"	245 440 240 123	1 230	93	243	67,9	128,5	11 951	328	91,0	172,8	16 070

$\varphi_m = 51^\circ 50'$, $z = 0^m$

Carron de 0,480.

 $\varphi = 45^\circ N$, $\Delta = 1^{\text{kg}} 235$

V	N° d'ordre	Types des canons	p	$\frac{p}{d}$	Projectiles ordinaires				Projectiles coiffés.			
					X_m	$0,5 E_m$	$\mathcal{C}$	$\frac{p}{d}$	X'_m	$0,5 [E]_m$	$\mathcal{C}'$	$\frac{p'}{d'}$
36	800 ^m	246 480 080 070	700 ^{kg}	207	25 ^{km}	4,0 ^{tkm}	10,0	2070	34 ^{km}	5,4 ^{tkm}	13,6	2815
"		247 480 080 085	850	197	27	5,2	11,8	2325	36	7,1	16,0	3152
"		248 480 080 100	1000	189	29	6,5	13,6	2570	38	8,9	18,4	3478
"		249 480 080 115	1150	183	30	8,0	15,4	2818	40	10,9	20,9	3824
"		250 480 080 130	1300	178	32	9,5	17,2	3062	42	13,0	23,4	4165
"		251 480 080 145	1450	173	33	11,0	19,0	3287	43	15,1	25,4	4394
"		252 480 080 160	1600	169	34	12,5	20,7	3498	44	17,2	27,5	4648
37	1200	253 480 120 070	700	152	47	7,6	18,9	2873	67	10,6	26,7	4058
"		254 480 120 085	850	145	52	10,3	23,2	3364	73	14,2	32,2	4669
"		255 480 120 100	1000	140	57	13,2	27,5	3850	78	17,9	37,4	5236
"		256 480 120 115	1150	135	62	16,3	31,7	4280	83	21,8	42,5	5738
"		257 480 120 130	1300	130	66	19,5	35,9	4667	88	25,9	47,5	6175
"		258 480 120 145	1450	126	70	22,9	40,0	5040	92	30,1	52,5	6615
"		259 480 120 160	1600	123	73	26,4	44,0	5412	95	34,4	57,5	7048
38	1600	260 480 160 070	700	127	79	12,8	31,8	4039	113	18,0	45,1	5728
"		261 480 160 085	850	121	89	17,5	39,6	4792	125	24,3	55,2	6679
"		262 480 160 100	1000	116	99	22,6	47,3	5492	136	31,2	65,1	7552
"		263 480 160 115	1150	112	108	28,1	54,9	6149	146	38,3	74,6	8355
"		264 480 160 130	1300	109	115	33,8	62,4	6802	154	45,7	83,9	9145
"		265 480 160 145	1450	106	122	39,9	69,8	7399	162	53,4	93,0	9858
"		266 480 160 160	1600	103	128	46,2	76,9	7921	169	61,4	101,9	10496
39	2000	267 480 200 070	700	110	115	18,8	46,5	5115	167	26,5	66,5	7315
"		268 480 200 085	850	105	131	25,7	58,1	6101	186	35,8	81,6	8568
"		269 480 200 100	1000	101	145	33,4	69,5	7020	202	45,8	96,2	9716
"		270 480 200 115	1150	98	157	41,6	80,8	7918	215	56,2	109,9	10770
"		271 480 200 130	1300	95	168	50,3	91,9	8731	227	67,0	123,3	11714
"		272 480 200 145	1450	92	178	59,5	102,9	9467	238	78,2	136,4	12549
"		273 480 200 160	1600	90	188	69,0	113,9	10251	249	89,8	149,4	13446
40	2400	274 480 240 070	700	99	159	25,6	63,6	6296	231	36,0	91,2	9029
"		275 480 240 085	850	94	177	35,0	78,9	7417	253	48,9	111,2	10553
"		276 480 240 100	1000	91	195	45,3	93,9	8545	274	62,7	131,1	11930
"		277 480 240 115	1150	88	211	56,2	108,7	9566	293	77,0	150,2	13218
"		278 480 240 130	1300	85	225	67,2	123,0	10455	309	91,5	168,1	14289
"		279 480 240 145	1450	83	237	78,5	136,6	11338	322	106,3	185,0	15355
"		280 480 240 160	1600	81	248	90,2	149,6	12118	335	121,4	201,5	16322

$\alpha_m = 51^\circ 50'$, $z = 0^m$

Cannon de 0,520

 $\varphi = 45^\circ N$, $\Delta = 1^{\text{kg}} 235$

V	N ^o d'ordre	Types des canons	p	GH	Projectiles ordinaires				Projectiles coiffés			
					X _m	0,5 E _m	R	R'	X' _m	0,5[E] _m	R'	R'
41	800 ^m	281 520 080 091	910 ^{kg}	179	26 ^{km}	5,4 ^{kgm}	11,9	2130	36 ^{km}	7,2 ^{kgm}	16,1	2882
	"	282 520 080 110	1100	172	28	7,0	14,0	2408	38	9,3	18,8	3234
	"	283 520 080 129	1290	167	30	8,8	16,1	2689	40	11,6	21,4	3574
	"	284 520 080 148	1480	162	31	10,6	18,2	2948	41	13,9	24,0	3888
	"	285 520 080 167	1670	157	33	12,5	20,3	3187	43	16,4	26,6	4176
	"	286 520 080 186	1860	153	34	14,5	22,4	3427	44	18,9	29,0	4437
	"	287 520 080 205	2050	150	36	16,7	24,5	3675	46	21,6	31,5	4725
42	1200	288 520 120 091	910	132	50	10,5	22,9	3023	70	14,3	31,6	4171
	"	289 520 120 110	1100	126	55	14,0	27,8	3503	76	19,0	37,9	4775
	"	290 520 120 129	1290	121	60	17,8	32,7	3957	81	23,9	44,0	5324
	"	291 520 120 148	1480	117	65	21,8	37,6	4399	86	29,0	49,9	5838
	"	292 520 120 167	1670	113	69	26,1	42,4	4791	90	34,3	55,6	6283
	"	293 520 120 186	1860	110	73	30,5	47,2	5192	94	39,7	61,2	6732
	"	294 520 120 205	2050	108	76	35,2	51,8	5594	98	45,4	66,7	7204
43	1600	295 520 160 091	910	110	84	17,8	38,7	4257	120	24,8	54,6	6006
	"	296 520 160 110	1100	104	95	24,2	48,0	4992	131	33,3	66,1	6874
	"	297 520 160 129	1290	100	105	30,9	57,0	5700	142	42,2	77,4	7740
	"	298 520 160 148	1480	97	113	38,3	65,8	6383	151	51,4	88,1	8546
	"	299 520 160 167	1670	94	120	46,0	74,3	6984	159	60,9	98,4	9250
	"	300 520 160 186	1860	91	127	53,7	82,6	7517	166	70,2	108,0	9828
	"	301 520 160 205	2050	89	133	61,5	90,4	8046	172	79,2	116,8	10395
44	2000	302 520 200 091	910	95	124	26,3	57,1	5425	176	36,9	80,6	7657
	"	303 520 200 110	1100	91	139	35,3	70,0	6370	194	49,1	97,4	8863
	"	304 520 200 129	1290	88	152	45,2	82,9	7295	209	62,0	113,8	10014
	"	305 520 200 148	1480	85	165	55,9	96,0	8160	223	75,8	130,1	11059
	"	306 520 200 167	1670	82	177	67,4	109,2	8954	237	90,5	146,2	11988
	"	307 520 200 186	1860	80	187	79,4	121,8	9744	249	105,7	162,1	12968
	"	308 520 200 205	2050	78	196	91,7	134,1	10460	259	120,9	177,6	13853
45	2400	309 520 240 091	910	86	167	35,3	76,8	6605	240	49,7	109,2	9391
	"	310 520 240 110	1100	82	187	47,9	94,5	7749	266	67,1	133,6	10955
	"	311 520 240 129	1290	79	205	61,1	112,0	8848	287	85,2	156,4	12356
	"	312 520 240 148	1480	76	221	75,4	129,1	9812	305	104,6	178,6	13574
	"	313 520 240 167	1670	74	235	90,3	145,7	10782	320	124,7	199,8	14785
	"	314 520 240 186	1860	72	247	105,8	161,7	11642	333	145,2	219,9	15833
	"	315 520 240 205	2050	70	256	121,5	176,4	12348	343	165,8	238,5	16695

Chapitre XXV

Abaques.

§ 165. Principe fondamental — Considérons les trois équations de trois courbes renfermant chacune un paramètre arbitraire: $F_1(x, y, \alpha) = 0$, (517) $F_2(x, y, \beta) = 0$, (518) $F_3(x, y, \gamma) = 0$. (519)

A chaque valeur du paramètre α correspond en vertu de (517) une courbe qu'on peut désigner par cette valeur α inscrite à côté d'elle. Pour rappeler que l'élément α a la même valeur tout le long d'une quelconque de ces courbes, celles-ci sont dites des isoplèthes pour l'élément α et sont désignées par la notation: (α) . De même, la variation de β dans (518) et celle de γ dans (519) fournissent les isoplèthes (β) et (γ) . Si nous éliminons x et y entre les relations (517), (518) et (519) nous obtenons celle à laquelle doit satisfaire un système de valeurs de α, β, γ , pour que les isoplèthes correspondantes passent par un même point. Cette relation peut s'écrire: $F_0(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ (520)

On peut dire que le Tableau graphique ou Abaque, formé par les trois systèmes de courbes cotées, qui viennent d'être définis, constitue une représentation graphique de l'équation (520). Un tel abaque est représenté en schéma par la figure 41. La liaison entre les valeurs de α, β, γ qui établit cette équation se traduit sur l'abaque par le fait du croisement en un même point des courbes ac-

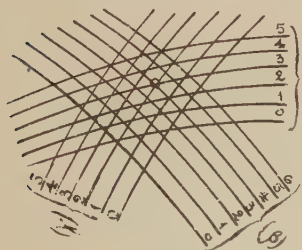


Fig. 41

(a) accompagnées des cotes correspondantes. Ainsi, sur l'abaque ci-contre (fig. 41), pour:

$$\alpha = 3, \quad \beta = 4, \quad \text{on aurait:} \quad \gamma = 2.$$

Les accroissements successifs donnés à chaque paramètre pour engendrer un cours d'isoplèthes sont assez petits pour que l'interpolation à vue puisse être faite avec un degré suffisant d'approximation. Nous dirons aussi bien pour les valeurs interpolées des variables que pour leurs valeurs cotées, que si l'on se

donne les valeurs de deux des variables α et β , on a la valeur correspondante de γ déterminée par l'équation (520), en lisant la cote de l'isoplèthe (γ) , qui passe par le point de croisement des isoplèthes (α) et (β) .

Étant donnée l'équation (520), on peut choisir arbitrairement deux quelconques des trois premières équations; par exemple (517) et (518); (519) s'obtient alors en éliminant α et β entre ces équations et l'équation donnée (520). Toute la question se réduit, étant donnée cette dernière, à choisir judicieusement (517) et (518) pour que les courbes représentées par celles-ci ainsi que celles données par l'équation (519), qui s'en déduit soient aussi simples que possible. On est d'abord amené à donner à (517) et (518) les formes les plus simples, en posant:

$$x = \alpha, \quad (521)$$

et:

$$y = \beta, \quad (522)$$

l'équation (519) devient dans ce cas:

$$F_0(x, y, \gamma) = 0. \quad (523)$$

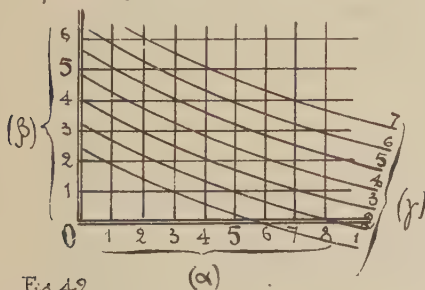


Fig. 42

Cela revient à prendre deux des variables pour coordonnées courantes et la troisième comme paramètre arbitraire. Les isoplèthes (α) sont des parallèles équidistantes à l'axe des y , les isoplèthes (β) des parallèles équidistantes à l'axe des x . L'abaque se compose donc des isoplèthes (γ) , tracées sur une feuille quadrillée (fig. 42)

§ 166. Principe de l'anamorphose — Prenons, par exemple une équation de la forme:

$$f(\alpha)\psi_1(\gamma) + \varphi(\beta)\psi_2(\gamma) + \psi_3(\gamma) = 0; \quad (524)$$

nous prendrons dans ce cas:

$$x = f(\alpha), \quad (525)$$

$$y = \varphi(\beta); \quad (526)$$

et l'élimination de α et β entre ces trois équations donne:

$$x\psi_1(\gamma) + y\psi_2(\gamma) + \psi_3(\gamma) = 0. \quad (527)$$

Les isoplèthes sont des parallèles aux axes, mais non équidistantes et les isoplèthes (γ) sont des droites tangentes à une certaine courbe qui est leur enveloppe, dont on obtient l'équation en éliminant γ entre l'équation (527) et l'équation dérivée par rapport à γ .

ABAQUE.

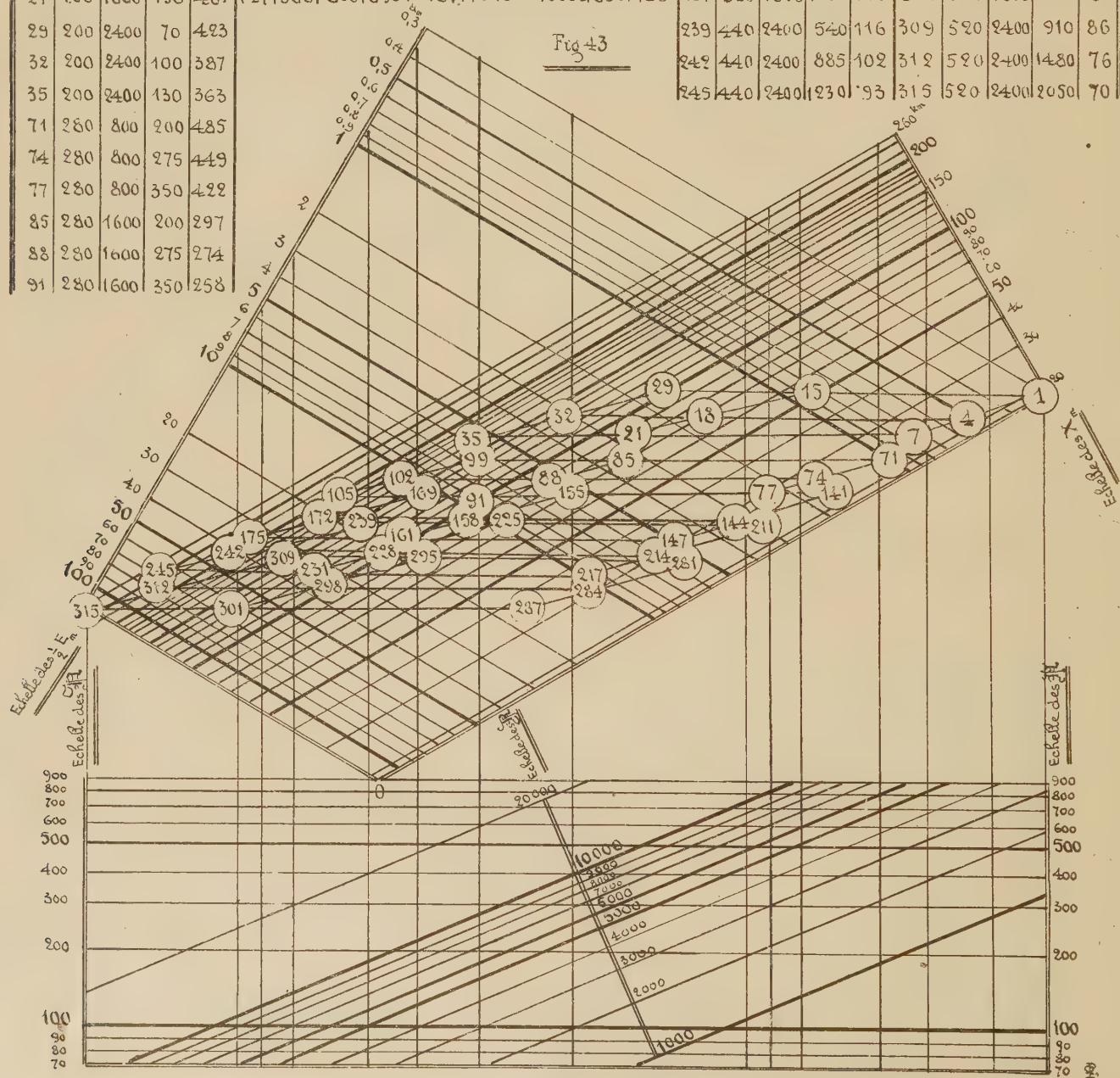
$$q = 51^{\circ}50', \quad z = 0^m,$$

Projectiles ordinaires.

$$\varphi = 45^{\circ}N, \quad \Delta = 1,235$$

N ^{os}	a	V	p	$\frac{H}{R}$	N ^{os}	a	V	p	$\frac{H}{R}$	N ^{os}	a	V	p	$\frac{H}{R}$	N ^{os}	a	V	p	$\frac{H}{R}$	N ^{os}	a	V	p	$\frac{H}{R}$
1	200 ^m	800 ^m	70 ^{kg}	885	99	280 ^m	2400 ^m	200 ^{kg}	232	155	360 ^m	1600 ^m	330 ^{kg}	204	211	440 ^m	800 ^m	540 ^{kg}	241	281	520 ^m	800 ^m	910 ^{kg}	179
4	200	800	100	810	102	280	2400	275	215	158	360	1600	510	183	214	440	800	885	213	284	520	800	1480	162
7	200	800	130	759	105	280	2400	350	202	161	360	1600	690	169	217	440	800	1230	195	287	520	800	2050	150
15	200	1600	70	540	141	360	800	330	333	169	360	2400	330	160	225	440	1600	540	147	295	520	1600	910	110
18	200	1600	100	494	144	360	800	510	299	172	360	2400	510	143	228	440	1600	885	130	298	520	1600	1430	97
21	200	1600	130	461	147	360	800	690	278	175	360	2400	690	133	231	440	1600	1230	118	301	520	1600	2050	89
29	200	2400	70	423											239	440	2400	540	116	309	520	2400	910	86
32	200	2400	100	387											242	440	2400	885	102	312	520	2400	1480	76
35	200	2400	130	363											245	440	2400	1230	93	315	520	2400	2050	70
71	280	800	200	485																				
74	280	800	275	449																				
77	280	800	350	422																				
85	280	1600	200	297																				
88	280	1600	275	274																				
91	280	1600	350	258																				

Fig 43



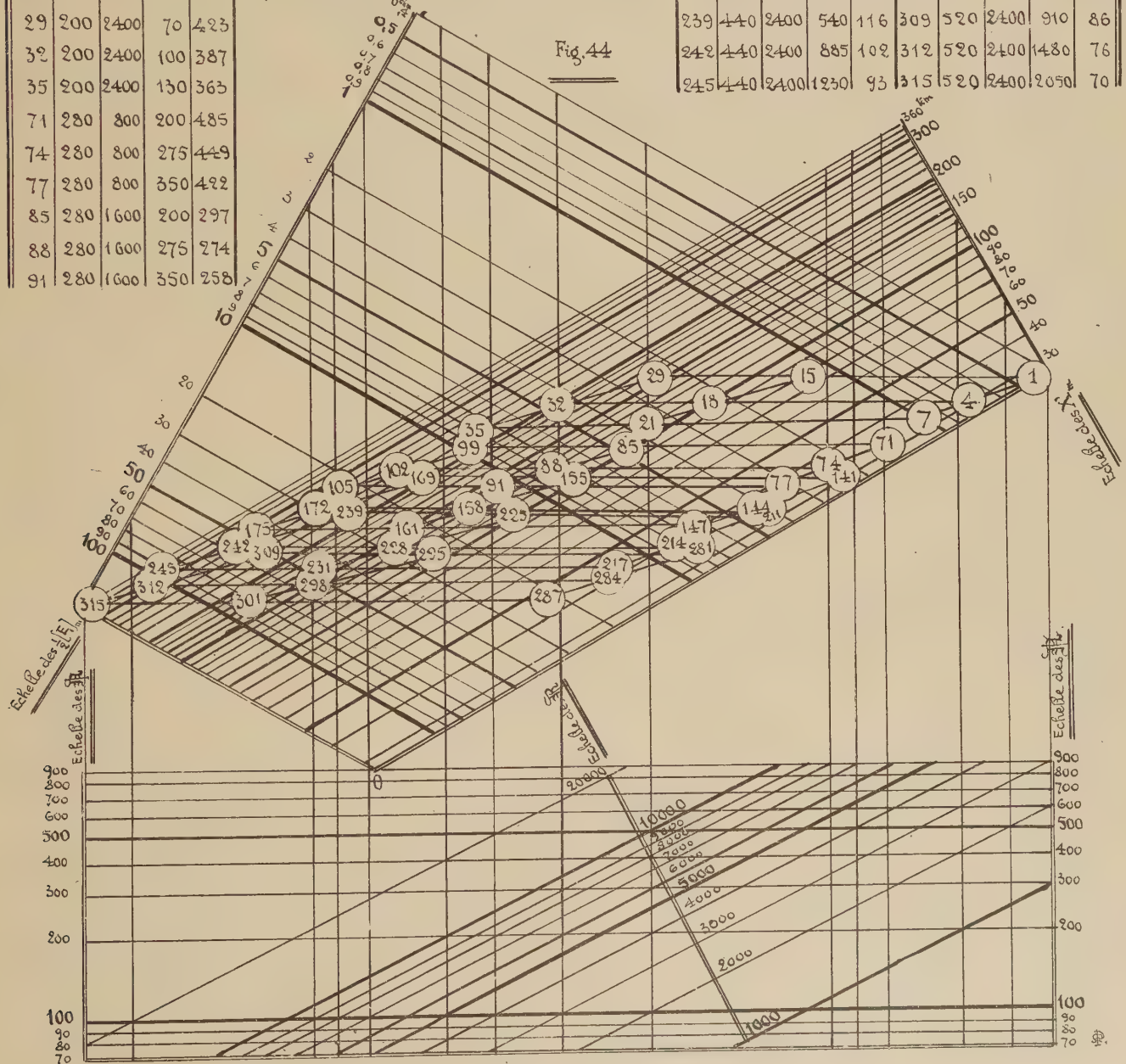
$$\alpha_m = 51^\circ 50', \quad z = 0^m$$

ABAQUE.

Projectiles coiffés.

$$\varphi = 45^\circ N, \quad \Delta = 1,255$$

N ^{os}	a	V	p	$\frac{H}{R}$	N ^{os}	a	V	p	$\frac{H}{R}$	N ^{os}	a	V	p	$\frac{H}{R}$	N ^{os}	a	V	p	$\frac{H}{R}$	N ^{os}	a	V	p	$\frac{H}{R}$
1	200	800	70	885	99	280	2400	200	232	155	360	1600	330	204	211	440	800	540	241	281	520	800	910	179
4	200	800	100	810	102	280	2400	275	215	158	360	1600	510	183	214	440	800	885	213	284	520	800	1480	162
7	200	800	130	759	105	280	2400	350	202	161	360	1600	690	169	217	440	800	1230	195	287	520	800	2050	150
15	200	1600	70	540	141	360	800	330	333	169	360	2400	330	160	225	440	1600	540	147	295	520	1600	910	110
18	200	1600	100	494	144	360	800	510	299	172	360	2400	510	143	228	440	1600	685	130	298	520	1600	1480	97
21	200	1600	130	461	147	360	800	690	278	175	360	2400	690	133	231	440	1600	1230	118	301	520	1600	2050	89
29	200	2400	70	423											239	440	2400	540	116	309	520	2400	910	86
32	200	2400	100	387											242	440	2400	885	102	312	520	2400	1480	76
35	200	2400	130	363											245	440	2400	1230	93	315	520	2400	2050	70
71	280	800	200	485																				
74	280	800	275	449																				
77	280	800	350	422																				
85	280	1600	200	297																				
88	280	1600	275	274																				
91	280	1600	350	258																				



C'est la substitution de ces droites (γ) aux courbes qui constitue l'anamorphose. Cherchons la forme générale des équations représentables par trois cours d'isoplèthes rectilignes. Dans cette hypothèse, les équations (517), (518) et (519) étant du premier degré peuvent s'écrire :

$$x f_1(\alpha) + y f_2(\alpha) + f_3(\alpha) = 0, \quad (528)$$

$$x \varphi_1(\beta) + y \varphi_2(\beta) + \varphi_3(\beta) = 0, \quad (529) \quad \text{et} \quad x \psi_1(\gamma) + y \psi_2(\gamma) + \psi_3(\gamma) = 0; \quad (530)$$

la forme de l'équation en α, β, γ correspondante est obtenue par l'élimination de x et de y entre ces équations.

On peut donc la mettre sous la forme :

$$\begin{vmatrix} f_1(\alpha) & f_2(\alpha) & f_3(\alpha) \\ \varphi_1(\beta) & \varphi_2(\beta) & \varphi_3(\beta) \\ \psi_1(\gamma) & \psi_2(\gamma) & \psi_3(\gamma) \end{vmatrix} = 0 \quad (531)$$

Voyons maintenant quelle est la forme générale des équations ainsi représentables, c'est-à-dire à triple règle parallèle. Chacun des cours d'isoplèthes étant engendré par une droite de direction constante, les équations (517), (518) et (519) sont ici respectivement :

$$y = m'x + f_1(\alpha), \quad (532) \quad y = m''x + \varphi_1(\beta), \quad (533) \quad y = m'''x + \psi_1(\gamma). \quad (534)$$

Éliminons x et y entre ces équations, nous obtenons pour l'équation en α, β, γ

$$(m''' - m') f_1(\alpha) + (m - m'') \varphi_1(\beta) + (m' - m) \psi_1(\gamma) = 0, \quad (535)$$

et m, m', m'' étant des constantes, nous pouvons l'écrire :

$$\psi(\gamma) = f(\alpha) + \varphi(\beta), \quad (536)$$

Pour représenter cette équation (536), posons :

$$x = f(\alpha), \quad (537) \quad \text{et} \quad y = \varphi(\beta); \quad (538)$$

il vient alors :

$$\psi(\gamma) = x + y \quad (539)$$

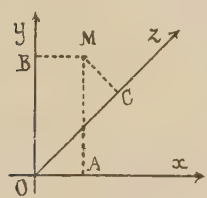


Fig. 45

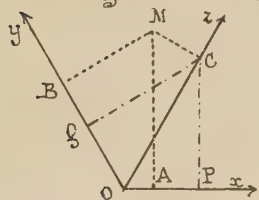


Fig. 46

Les isoplèthes (α) sont des parallèles à Oy , les isoplèthes (β) des parallèles à Ox et les isoplèthes (γ) des parallèles à la bissectrice Oz de l'angle xOy des axes (fig. 45). Afin d'avoir sur Oz les valeurs de $\psi(\gamma)$ à la même échelle que celles de $f(\alpha)$ et de $\varphi(\beta)$ sur Ox et Oy , prenons ces axes Ox et Oy , faisant entre eux un angle de 120° . En effet, les axes Ox et Oy étant gradués en segments proportionnels aux valeurs de $f(\alpha)$ et de $\varphi(\beta)$, cherchons quelle sera la graduation de Oz . Les coordonnées sont les distances à l'origine O des pieds des perpendiculaires abaissées du point M considéré (fig. 46)

sur les axes Ox, Oy . L'isoplèthe (γ), ayant pour équation :

$$x + y = \psi(\gamma), \quad (540)$$

si elle coupe Oz en un point C , les coordonnées de ce point étant :

$$x = y = \frac{OC}{2},$$

on a :

$$\frac{OC}{2} + \frac{OC}{2} = 2 \frac{OC}{2} = OC = \psi(\gamma);$$

l'axe Oz est donc gradué en segments proportionnels aux valeurs de $\psi(\gamma)$, l'échelle étant la même que pour les axes Ox et Oy . On peut donc dire : La projection d'un segment de droite sur la bissectrice d'un angle de 120° est égale à la somme des projections de ce segment sur les

côtés de cet angle. Ceci résulte de l'identité trigonométrique :

$$\cos(\omega + 60^\circ) + \cos(60^\circ - \omega) = 2 \cos 60^\circ \cos \omega = \cos \omega \quad (541)$$

Les abaques sont appelés hexagonaux en raison de ce que les échelles sont parallèles aux diagonales d'un hexagone régulier. Si l'équation proposée est de la forme :

$$\psi(\gamma) = f(\alpha) \cdot \varphi(\beta) \quad (542)$$

on l'amène à la forme requise par l'application du procédé en prenant les logarithmes des deux membres, ce qui donne :

$$\log \psi(\gamma) = \log f(\alpha) + \log \varphi(\beta) \quad (543)$$

§ 167. Application

Nous avons trouvé les formules : $R = \sqrt{0,0005 X_m E_m}$ (544) et : $\frac{R}{V} = \frac{X_m}{V} \cdot E$ (545)

donnant l'effet utile d'un coup de canon et le rendement effectif de ce canon. La

formule (544) donnant R peut être représentée par un abaque hexagonal dont les axes sont Ox, Oy, Oz , et la formule (545) donnant $\frac{R}{V}$ par un abaque de multiplication dont les axes sont $\omega z, \omega \eta$. La figure 47 donne le schéma de ces abaques, et les figures 43 et 44 indiquent ces abaques pour les projectiles ordinaires et coiffés. Ils mon-

trient, par exemple, que pour battre un but à 125^{km} avec une énergie : $0,5 E_m = 35^{\text{tkm}}$ il faut se

servir du canon 440 160 125 pour lequel $a = 0^{\text{m}}, 440$, $V = 1600^{\text{m}}$ et $p = 1230^{\text{kg}}$, le projectile

étant ordinaire, tandis que le même canon lançant, dans les mêmes conditions un projectile coiffé peut battre un but à 165^{tkm} avec une énergie : $0,5 E_m = 45^{\text{tkm}}$. Les projectiles coiffés sont manifestement avantageux.

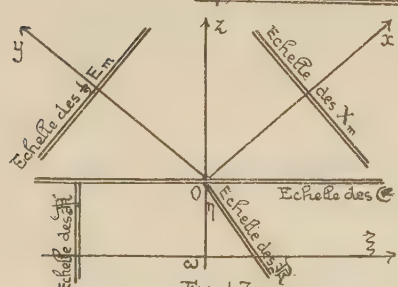


Fig. 47

CONCLUSIONS

Après avoir rappelé le mouvement des projectiles dans le vide et les diverses recherches qui ont été faites sur la résistance de l'air, nous avons étudié leur mouvement dans l'air et les propriétés générales des trajectoires.

Nous avons montré que lorsqu'il s'agit de canons de gros calibre et à très longues portées, il n'est plus possible, comme dans le tir ordinaire de plein fouet, de supposer la terre plane et immobile d'une part, la gravité constante en grandeur et en direction d'autre part, et encore moins le milieu en repos et de densité constante.

Nous avons établi que, toutes choses égales d'ailleurs, l'effet utile d'un coup de canon et le rendement de ce canon sont d'autant meilleurs que 1° le calibre du canon est plus petit; 2° le poids du projectile est plus lourd; 3° la vitesse initiale de ce projectile est plus grande; 4° l'altitude du lieu d'expérience est plus élevée et 5° ce lieu d'expérience est plus rapproché de l'équateur. Plusieurs exemples ont enfin mis en évidence qu'une table de tir n'est valable qu'au lieu d'expérience pour lequel elle a été établie.

Telles avaient déjà été les conclusions du Mémoire que nous avons déposé en Octobre 1916, au Ministère des inventions pour la Défense nationale.

Nous pouvons conclure en disant que la vitesse initiale, en balistique moderne, joue le rôle prépondérant et qu'il y a un très grand intérêt à l'augmenter le plus possible. Il faut donc allonger l'âme des canons et faire emploi de poudres excessivement lentes au début de la combustion, celles-ci progressant très rapidement.

Lu et approuvé :

Les Membres du Jury,

R. LE VAVASSEUR. H. DULAC.

JEAN MASCART.

Vu et approuvé :

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

C. DEPÉRET.

Vu et permis d'imprimer :

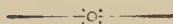
LYON, LE 5 MAI 1919.

Pour le Recteur et par délégation :

Le Vice-Président du Conseil de l'Université,

C. DEPÉRET.

SECONDE THÈSE



De l'Energétique d'un Nouveau Type
de Projectile Hétérogène



A LA MÉMOIRE

DE

A. HERVIEUX,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Nancy,
 mon Professeur dévoué
 de Mathématiques spéciales au Lycée de Nancy.

A

Monsieur GEORGES GOUY,

Membre de l'Institut,
 Professeur à l'Université de Lyon.

Monsieur JEAN MASCART,

Directeur de l'Observatoire de Saint-Genis-Laval,
 Professeur à l'Université de Lyon.

Hommage respectueux de reconnaissance.

« La preuve dernière que nous avons de l'existence de la matière, c'est qu'elle est capable de résister. »

HERBERT SPENCER.

AVANT-PROPOS

Il y a vingt-cinq ans environ, j'étais ingénieur au service de l'artillerie des usines du Creusot spécialement chargé des expériences qui étaient faites au polygone de la Villedieu. Celles-ci portaient soit sur l'étude balistique des canons et des projectiles, soit sur la résistance des plaques de blindage.

Or, un jour, pour une raison qui m'est restée inconnue, on tira sur une plaque destinée au « Dupuy-de-Lôme », si j'ai bonne mémoire, un projectile d'acier qu'on avait préalablement lesté avec du plomb, celui-ci remplissant complètement la cavité intérieure de l'obus. Peut-être avait-on en vue, en donnant une plus grande masse au projectile, de mieux assurer la destruction de la plaque soumise à l'essai. Toujours est-il qu'il arriva juste le contraire de ce qu'on désirait. La plaque resta intacte et le projectile fut pulvérisé. D'autres essais analogues conduisirent aux mêmes résultats inattendus. Le projectile explosait toujours et la plaque n'était jamais endommagée. En présence de ces faits aussi étranges qu'inexpliqués, l'idée fut abandonnée et on ne tira aucun profit de ces fameuses expériences.

Déjà, à cette époque, j'avais entrevu la cause de ce phénomène et j'en avais calculé très sommairement les effets; mais n'ayant pas été appelé à donner des explications, j'ai gardé pour moi mes réflexions et ce n'est que tout récemment que j'ai eu la pensée de reprendre la question et de la soumettre à une analyse complète.

Que s'est-il donc passé dans ces curieuses expériences du Creusot? A quelle cause peut-on attribuer ce phénomène? Quel parti peut-on en tirer?

Ce sont les réponses à ces diverses questions qui vont faire l'objet de cette seconde thèse complétant logiquement la première, car il y sera démontré que l'emploi d'un tel projectile hétérogène dans les canons de gros calibre et à très longues portées peut présenter certains avantages.

Lyon, le 8 Septembre 1918.

Historique.

Il est difficile de dire à qui appartient l'honneur d'avoir découvert le Principe de l'Équivalence de la chaleur et du travail mécanique.

Sadi-Carnot semble l'avoir reconnu vers la fin de sa vie; mais ses recherches sur ce sujet, consignées dans des notes manuscrites publiées seulement dans ces dernières années, restèrent longtemps ignorées et ne furent d'aucun profit pour la science.

Il était réservé à Robert Mayer de le retrouver et de le faire connaître. Mais au moment où Mayer énonçait ce Principe, Joule était occupé à des expériences qui devaient infailliblement le conduire à sa découverte et qui devinrent la meilleure démonstration de son exactitude.

De son côté,olding sans avoir connaissance des travaux de Mayer et de Joule, était sur le point d'arriver au même résultat.

Les premières traces de l'idée de la conservation de l'énergie remontent très loin. De tout temps la découverte du mouvement perpétuel a été le but de bien des recherches. Galilée s'inspirant des conditions de fonctionnement des machines simples, affirma le premier l'impossibilité d'un tel mouvement.

Quelques années après, Descartes énonce le Principe de la Conservation du mouvement; "l'état étant immuable, dit-il, il a dû conserver la même quantité de mouvement". Cette démonstration n'a rien de scientifique. Mais, modifié par Huyghens, le principe de Descartes est devenu un des Principes importants de la Mécanique: le Principe des quantités de mouvement projetées.

Leibnitz a eu l'intuition des idées actuelles sur la force vive. Suivant ce mathématicien, si l'action motrice paraît se perdre dans certains cas, c'est que les mouvements sensibles sont transformés en mouvements moléculaires. On ne pouvait exprimer plus clairement l'hypothèse qui a été l'origine de la Théorie mécanique de la chaleur. Les idées de Leibnitz ne tardèrent pas à être précisées: on en déduisit le fameux Théorème des forces vives.

L'état des sciences mathématiques vers la fin du XVIII^e siècle permettait donc de prévoir que, au moins dans un grand nombre de cas, il y a conservation de l'énergie dans les phénomènes mécaniques.

La thermodynamique repose tout d'abord sur ce Principe de la Conservation de l'énergie, puis sur le Principe de la Dissipation de l'entropie plus souvent nommé Principe de Carnot ou encore Principe de Clausius.

Le caractère essentiel de l'état solide est la résistance au changement de forme. Des déformations peuvent cependant se produire, soit momentanées, soit persistantes. Tout corps solide soumis momentanément à l'action d'une force extérieure éprouve une déformation qui disparaît complètement lorsqu'on supprime la force, pourvu toutefois que celle-ci soit inférieure à une certaine limite, variable avec les différents corps. Tant que cette limite dite d'élasticité n'est pas atteinte, les forces intérieures mises en jeu par la déformation luttent contre les forces extérieures, et un nouvel équilibre s'établit sous l'action réciproque des deux systèmes de forces opposées.

La détermination des conditions de cet équilibre, plus généralement l'étude des forces élastiques constitue l'une des questions les plus importantes et les plus difficiles de la Physique mathématique. D'illustres savants tels que Navier (1827), Cauchy (1827-28), Poisson (1829 et 1831), Lamé (1852), de Saint-Venant (1856), Kirckhoff (1850 et 1859), Clebsch (1862), Beer (1869), Philipps (1865 et 1869), Bauschinger (1878), Violle (1883), Sarrau (1889), Föppl (1901), Boussinesq, Résal et Hertz ont successivement repris le sujet au point de vue théorique en s'aidant des ressources de l'Analyse la plus élevée.

D'autre part, Hooke (1678), Gravesande (1720), Coulomb (1784), Young (1807), Savart (1829 et 1837), Weber (1835 et 1841), Regnault (1847), Wertheim (1844 et 1857), Kirckhoff (1859), Cornu (1869), Schwartz, Rankine ont appliqué à l'étude expérimentale de l'élasticité des procédés de plus en plus délicats et précis.

Signalons enfin les essais qui sont sans cesse poursuivis tant aux laboratoires de l'Ecole des Ponts et

Chaussées et du Trocadéro qu'au Palais des Arts et Métiers de Paris.

Bien que, en toute rigueur, il n'y ait peut-être pas d'effort qui ne produise une déformation permanente d'un solide naturel quelconque, un corps solide, est de fait parfaitement élastique pour des forces extérieures d'intensité et de durée suffisamment faibles.

Il obéit alors aux deux lois suivantes formulées par Hooke, d'après ses expériences sur les ressorts, et qui ne sont à vrai dire que des conséquences nécessaires de la continuité.

1°. Le changement de forme est proportionnel à la force extérieure, en d'autres termes, l'effort élastique est proportionnel à la déformation.

2°. Le changement de forme reste le même au signe près quand on change le signe de la force, c'est-à-dire quand on remplace la traction par la compression ou quand la torsion ou la flexion se font en sens contraires.

Dans la présente Thèse, nous rappellerons tout d'abord les formules générales de l'élasticité; puis nous les appliquerons pour calculer l'effort élastique interne qui se développe dans un projectile hétérogène analogue à celui expérimenté au polygone du Creusot, lorsque par suite d'un arrêt brusque, au point de chute, par exemple, son énergie cinétique est en partie transformée en chaleur. Nous verrons enfin quelles sont les conséquences d'une telle transformation et quel parti on en peut tirer.

Des Notations et Abréviations adoptées.

Dans tout ce qui va suivre nous désignerons par :

Ω	l'élément de surface sur lequel s'exerce l'action moléculaire, exprimé en centimètres carrés;	} exprimées en kilogrammes.
Y	l'élément de volume sur lequel s'exerce l'action moléculaire, exprimé en centimètres cubes;	
F	la force ou la résultante des forces agissant sur la masse du corps;	
X, Y, Z	les composantes de cette force F parallèles aux axes de coordonnées Ox, Oy, Oz ;	
P	l'action moléculaire concernant l'élément de surface Ω ou l'élément de volume Y ;	
P_n	la composante de l'action moléculaire P normale à l'élément de surface Ω ;	
P_x, P_y, P_z	les composantes de l'action moléculaire P parallèles aux axes de coordonnées Ox, Oy, Oz ;	
R	l'intensité de l'action moléculaire : $R = \frac{P}{\Omega}$;	
R_n	l'intensité de l'action moléculaire normale à l'élément Ω ;	
R_t	l'intensité de l'action moléculaire tangentielle;	
R_x, R_y, R_z	les composantes de l'intensité R parallèles aux axes de coordonnées Ox, Oy, Oz ;	} exprimés en kilogrammes-centimètres.
S	l'intensité de l'action moléculaire tangentielle à l'élément Ω ;	
S_{xy}	la composante tangentielle de l'intensité de l'action moléculaire, le premier indice donnant la direction de la normale à l'élément de surface Ω , le second indiquant la direction de l'axe à laquelle elle est parallèle. Ainsi, pour S_{xy} , la normale est parallèle à l'axe Ox et la composante est parallèle à l'axe Oy ;	
	Il en est de même pour $S_{xz}, S_{yx}, S_{yz}, S_{zx}$ et S_{zy} ;	
T	le travail élastique de comparaison;	
$\mathcal{C}$	le travail de déformation;	
$\mathcal{C}'$	le travail spécifique de déformation;	
E, E'	les coefficients d'élasticité longitudinaux;	
G, G'	les coefficients d'élasticité transversaux;	
μ	le coefficient de souplesse directe : $\mu = \frac{1}{E}$;	
β	le coefficient de souplesse transversale : $\beta = \frac{1}{G}$;	
$\frac{1}{m}$	le coefficient de contraction transversale;	

l, λ	les longueurs;	
x, y, z	les coordonnées d'un point par rapport aux axes Ox, Oy et Oz ;	
a	le demi-calibre ou le rayon extérieur du projectile;	} exprimés en centimètres
b	le rayon intérieur du projectile;	
$\varepsilon, \varepsilon'$	les dilatations linéaires;	
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	les composantes des dilatations linéaires parallèles aux axes de coordonnées Ox, Oy, Oz ;	
$\varepsilon_n, \varepsilon_t$	les dilatations linéaires normales;	
$\varepsilon_\tau, \varepsilon_\theta$	les dilatations linéaires tangentielles;	
e	les dilatations cubiques	
$\frac{dP}{dt}, \frac{dP}{d\lambda}$	les raideurs du système	
g	l'accélération de la pesanteur exprimée en mètres-seconde;	
v	la vitesse restante tangentielle du projectile au point de chute exprimée en mètres-seconde;	
p, p'	les poids;	} exprimés en kilogrammes;
ω, ω'	les poids spécifiques;	
t, t', z, θ	les diverses températures;	} exprimées en degrés centigrades;
Θ	la température absolue, par exemple : $\Theta = -273^\circ + t$;	
c, c', c''	les chaleurs spécifiques;	} exprimées en grandes calories;
$\gamma, \gamma', \gamma''$	les chaleurs latentes;	
k, k', k''	les coefficients de dilatation calorifique cubique;	
H	l'équivalent mécanique de la chaleur;	
μ	un coefficient de réduction compris entre 0 et 1 : $0 < \mu < 1$;	
A, B, C, C''	expriment en général des quantités constantes;	
φ	l'angle que fait l'élément de surface Ω avec un des axes de coordonnées Ox, Oy, Oz	} exprimés en degrés sexagésimaux ou en radians.
$(\hat{n}_x)(\hat{n}_y)(\hat{n}_z)$	les angles que la direction normale à l'élément de surface Ω fait avec les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz	

Il est bien entendu que si quelques modifications sont apportées à ces notations et aux unités choisies dans le cours de notre étude, il en sera fait mention immédiatement.

Chapitre I^{er}

Généralités sur les forces intérieures ou actions moléculaires.

§1. Actions moléculaires. — En général, les corps n'exercent d'actions mesurables les uns sur les autres que lorsqu'ils sont en contact. Les forces qui s'exercent entre une partie d'un corps et l'autre partie de ce corps sont de même nature que celles qui se produisent au contact de différents solides, et en particulier leurs points d'application sont sur la surface de séparation des deux portions considérées. Ces forces ont, en général, une direction quelconque, un corps solide opposant une résistance à toute déformation, quelle qu'elle soit. Elles naissent dans la matière elle-même sous l'influence des forces extérieures qui agissent sur le corps. On les appelle actions moléculaires.

Comme on peut délimiter arbitrairement une portion du corps, on peut toujours faire en sorte que l'action moléculaire agissant dans une direction donnée devienne une force extérieure et par suite accessible au calcul.

Si, en particulier, on applique les équations générales de l'équilibre à un élément du corps

limité d'une façon quelconque, on peut obtenir des relations entre les actions moléculaires agissant en divers points du corps selon des directions différentes; ces relations servant de base à tous les développements subséquents.

Si nous délimitons une portion du corps de telle sorte qu'une partie de la surface de séparation coïncide avec la surface extérieure du corps, il faut qu'il y ait équilibre entre les forces extérieures qui agissent sur la partie considérée de la surface extérieure et les actions moléculaires réparties sur le reste de la surface de séparation. Comme, en général, les forces extérieures sont données, les équations d'équilibre permettent de calculer dans certains cas les actions moléculaires.

§2. Intensité des actions moléculaires. — Il n'y a que l'étude des déformations précédant la rupture d'un corps soumis à des forces extérieures qui puisse renseigner sur la répartition des actions moléculaires; car ces déformations dépendent de cette répartition. La nature de cette dépendance varie suivant les propriétés particulières des corps considérés, et ne peut se déterminer que par l'expérience.

Si, par exemple, nous soumettons une tige AB à l'action de deux forces F, F' appliquées à ses extrémités et dirigées suivant son axe en sens contraires (fig. 1), les conditions d'équilibre appliquées à la partie de gauche d'une section C exigent que la résultante des forces intérieures agissant dans cette section soit opposée à la force F et soit dirigée suivant de la tige. Si la section C est assez éloignée des extrémités de la tige et si la matière est élastique, on peut admettre, en se basant sur

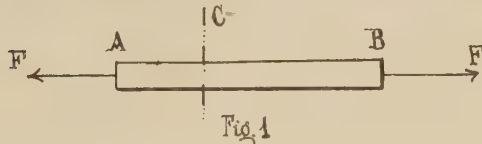


Fig. 1

des considérations géométriques que les allongements élastiques des divers points de cette section sont égaux entre eux, ainsi que les actions moléculaires agissant en ces points.

Il est alors possible de calculer la force intérieure qui agit sur l'unité de surface en divisant la force F par la section Ω . Ce quotient:

$$P = \frac{F}{\Omega} \quad (1)$$

est appelé intensité de l'action moléculaire dans la section considérée, ou encore action moléculaire spécifique.

La grandeur que l'intensité P peut atteindre sans qu'il y ait danger de rupture dépend de la matière dont la tige est formée.

§3. Composantes de l'action moléculaire agissant sur un point donné dans une direction donnée. — En général, les actions moléculaires ne sont pas uniformément réparties sur une surface; il nous faut donc modifier la définition que nous venons de donner pour l'intensité d'une action moléculaire. Considérons au point donné un élément de surface $d\Omega$, et soit dF la part de la force F transmise par cet élément $d\Omega$; nous appellerons intensité de l'action moléculaire au point

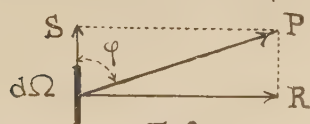


Fig. 2

considéré, l'expression:

$$P = \lim \left[\frac{dF}{d\Omega} \right] = \frac{dF}{d\Omega} \quad (2)$$

d'où nous tirons:

$$dF = P d\Omega \quad (3)$$

Or l'action moléculaire n'est pas forcément normale à l'élément $d\Omega$. Désignons par P l'action moléculaire faisant l'angle φ avec l'élément. Décomposons P

en deux composantes R et S , la première R normale à l'élément $d\Omega$ représente l'intensité de l'action moléculaire normale et a pour expression, (fig. 2):

$$R = P \cos \varphi = \frac{dF}{d\Omega} \cos \varphi \quad (4)$$

la seconde S dans le plan de l'élément $d\Omega$ représente l'intensité de l'action moléculaire tangentielle, et a pour valeur:

$$S = P \sin \varphi = \frac{dF}{d\Omega} \sin \varphi \quad (5)$$

Par convention, sera supposée positive toute action moléculaire normale tendant à séparer l'élément $d\Omega$ de l'élément de surface infiniment voisin, c'est-à-dire qui fait travailler la matière à l'extension; et négative toute action moléculaire normale qui tend à rapprocher ces deux éléments voisins, c'est-à-dire lorsqu'il y a compression.

Les actions moléculaires tangentielles sont complètement déterminées si l'on donne leurs composantes suivant deux axes de coordonnées tracés dans le plan de l'élément $d\Omega$.

Trois composantes sont donc nécessaires pour définir complètement l'action moléculaire P qui agit sur l'élément de surface $d\Omega$. Mais pour définir l'état élastique du corps au point considéré, c'est-à-dire l'état du solide en ce point sous l'influence des forces extérieures, il faut connaître l'action moléculaire qui agit en ce point sur un élément de surface orienté d'une façon quelconque.

§ 4. Tétrahédre des actions moléculaires. — Il suffit de connaître l'action moléculaire relative à trois éléments de surface passant par le point O pour que l'état élastique en ce point soit complètement déterminé.

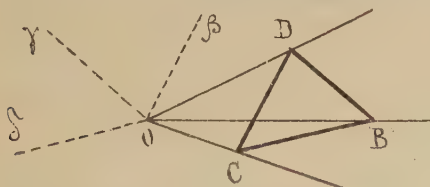


Fig. 3

Soit en effet un tétraèdre infiniment petit dont l'un des sommets est au point O considéré (fig. 3); écrivons pour ce corps les conditions générales d'équilibre en supposant de plus que les trois forces passant par ce point coïncident avec les trois éléments de surfaces sur lesquelles l'action moléculaire est connue, la quatrième face BCD étant quelconque. L'action moléculaire qui agit sur la face BCD diffère peu de celle qui agirait sur le plan $O\beta\gamma\delta$ parallèle à BCD et passant par le point O . Ceci fait, supposons que le tétraèdre devienne de plus en plus petit de façon que la face BCD se rapproche de plus en plus du plan $O\beta\gamma\delta$; à la limite la différence entre les actions moléculaires sur les plans BCD et $O\beta\gamma\delta$ tend vers zéro.

Le tétraèdre $OBCD$ est sollicité par cinq forces extérieures qui doivent se faire équilibre, ce sont: les quatre actions moléculaires qui agissent sur chacune des faces et la résultante des forces extérieures agissant sur la masse du solide. Dans la plupart des cas, ces forces extérieures se réduisent à une seule, le poids du tétraèdre.

Si le corps est en mouvement, il faut y ajouter les forces d'inertie.

Toutefois ces forces qui dépendent de la masse du tétraèdre sont des infiniment petits du troisième ordre et par suite négligeables devant les actions moléculaires qui elles, sont proportionnelles à l'aire des surfaces et sont alors des infiniment petits du deuxième ordre seulement.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la somme géométrique des quatre actions moléculaires soit nulle, la force inconnue se trouve donc comme ligne de fermeture d'un polygone gauche des forces ou à l'aide de la méthode analytique, il faut que ces quatre forces soient concourantes. Il résulte de là que les actions moléculaires agissant sur les trois éléments de surface donnés doivent satisfaire à certaines conditions pour être compatibles entre elles. On trouve ces conditions en écrivant que les sommes des moments des forces par rapport à ces trois axes rectangulaires sont nulles.

Il est toutefois plus simple de considérer l'équilibre d'un parallélépipède infiniment petit.

§ 5. Décomposition des actions moléculaires. Équilibre d'un parallélépipède infiniment petit. — Supposons que les trois faces du tétraèdre précédent forment un trièdre trirectangle. Soit O le point dont nous nous proposons d'étudier l'état élastique. Prenons le comme sommet d'un parallélépipède infiniment petit dont les arêtes sont dirigées suivant Ox, Oy, Oz . Choisissons le point O pour origine des coordonnées et les arêtes Ox, Oy, Oz pour axes de coordonnées rectangulaires.

Le parallélépipède étant supposé infiniment petit, nous pouvons admettre, sans erreur sensible, que les actions moléculaires sont réparties uniformément sur les faces du solide. La résultante des actions agissant sur une face passe alors par son centre et elle est égale en grandeur au produit de l'intensité moléculaire par l'aire du rectangle considéré.

Les composantes normales des actions moléculaires ont la direction des axes de coordonnées. Décomposons les composantes tangentielles agissant sur chaque face en deux composantes parallèles à ces axes. Sur les six faces du parallélépipède agissent donc 18 composantes faisant équilibre aux forces extérieures qui agissent sur le solide.

Examinons d'abord les relations qui existent entre les composantes qui sont appliquées à deux faces

opposées. Considérons pour cela les deux parties M et N d'un corps séparées par une section plane. En vertu du principe de l'action et de la réaction, l'action moléculaire exercée par M sur N en un point déterminé de la section est opposée à celle exercée par N sur M et lui est égale en grandeur. Prenons en ce point la normale à la section de séparation d'un côté de celle-ci seulement. Pour l'une des parties, M par exemple, cette normale sera extérieure, pour l'autre N sera intérieure.

Un travail à l'extension est pour chacune de ces parties fourni par une force dont le sens coïncide avec celui de la normale extérieure à la partie considérée. Car, si nous envisageons l'autre partie du corps, d'après le Principe de l'action et de la réaction le sens de la force est changé, mais en même temps le sens de la normale extérieure a changé aussi, de telle sorte que nous pouvons dire, sans ambiguïté, que la composante normale d'une action moléculaire produit toujours un travail à l'extension, c'est-à-dire est positive quand elle coïncide en direction avec la normale extérieure à la section considérée.

Considérons, par exemple, les deux faces opposées OBCG et ADEF perpendiculaires à l'axe Ox (fig. 4). La normale extérieure à la face ADEF sera dirigée suivant les x positifs, celle de l'autre face OBCG aura le sens des x négatifs. Supposons que l'on rapproche indéfiniment ces deux faces, l'action moléculaire agissant sur l'une des faces sera alors la réaction de l'action moléculaire agissant sur l'autre. Il en résulte, que les composantes des actions moléculaires agissant sur deux faces opposées sont toujours de sens contraires.

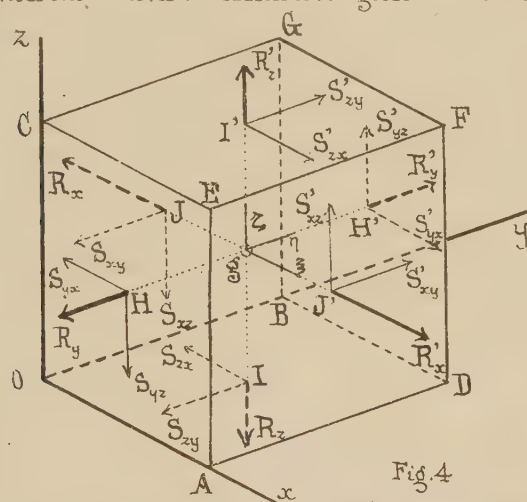


Fig. 4

Nous ferons la convention suivante de signe : pour les faces du solide dont les normales extérieures sont dirigées dans le sens des coordonnées positives, la composante normale R est également positive, car nous avons déjà convenu d'affecter du signe $+$ les actions faisant travailler la matière à l'extension. Le plus simple est donc de prendre avec le signe $+$ non seulement la composante R , mais aussi les deux composantes de S lorsque les normales extérieures des faces sont dirigées dans le sens positif. Sur les faces opposées, il faut changer tous les signes si les composantes des actions moléculaires sont positives. C'est ce qui est indiqué sur la figure 4 ci-dessus.

La normale à la face située dans le plan xOz est dirigée suivant les y négatifs, par suite les flèches de R et des composantes de S sont également dirigées selon les coordonnées négatives. Dans les deux autres faces visibles ADEF et OBCG, les normales extérieures sont positives, les flèches sont tracées dans le sens des axes positifs.

Nous adopterons enfin les notations suivantes. Cha que lettre R est affectée d'un indice inférieur qui indique à quelle face elle se rapporte, cela en donnant la direction de l'axe auquel cette face est perpendiculaire. De même, les lettres désignant les composantes tangentielles sont affectées de deux indices inférieurs; le premier indique la direction de la normale à la face sur laquelle elles agissent; le second indique la direction de l'axe à laquelle cette composante est parallèle. Enfin, pour les faces qui passent par le point O , on peut admettre, en faisant abstraction de quantités infiniment petites d'ordre supérieur, qu'en tous les points d'une même face les composantes R et S ont la même valeur qu'au point O . Par contre, il n'est plus permis de négliger les variations qu'éprouvent les quantités quand on passe de la face considérée à la face opposée.

En général, les composantes des actions moléculaires sont des fonctions des coordonnées x, y, z du point d'application. Nous admettrons que ces fonctions sont continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, ce qui revient à supposer : 1°) que la matière est homogène, c'est-à-dire que ses propriétés élastiques sont les mêmes en chaque point ou tout au moins qu'elles varient d'une façon continue quand on se déplace à l'intérieur du corps; 2°) que la périphérie du corps est une surface continue; 3°) que la loi de répartition des forces extérieures peut être représentée par une fonction continue de x, y, z .

En vertu de ces hypothèses, connues dans leur ensemble, sous le nom de Loi de continuité, il est facile

d'exprimer la valeur des composantes qui agissent sur les faces opposées et celles passant par le point 0.

Soient, par exemple, les forces agissant sur la face située dans le plan xOz , qui sont: R_y, S_{yx}, S_{yz} ; on peut les supposer appliquées au centre de gravité H de cette face. Si on passe au centre de gravité H' de la face opposée, x et z ne varient pas, mais y décroît de dy ; les composantes des actions moléculaires relatives à cette face s'obtiennent donc en développant R_y, S_{yx}, S_{yz} en séries par la formule de Taylor et en négligeant les termes qui suivent le deuxième. Nous pouvons donc écrire pour la face BDFG opposée à la face OABC:

$$R'_y = R_y + \frac{dR_y}{dy} dy, \quad S'_{yx} = S_{yx} + \frac{dS_{yx}}{dy} dy, \quad S'_{yz} = S_{yz} + \frac{dS_{yz}}{dy} dy;$$

de même pour la face EFGC opposée à la face OADB:

$$R'_z = R_z + \frac{dR_z}{dz} dz, \quad S'_{zy} = S_{zy} + \frac{dS_{zy}}{dz} dz, \quad S'_{zx} = S_{zx} + \frac{dS_{zx}}{dz} dz;$$

et pour la face ADFE opposée à la face OBGC:

$$R'_x = R_x + \frac{dR_x}{dx} dx, \quad S'_{xz} = S_{xz} + \frac{dS_{xz}}{dx} dx, \quad S'_{xy} = S_{xy} + \frac{dS_{xy}}{dx} dx.$$

Il est maintenant facile d'écrire les équations d'équilibre des forces qui sollicitent le parallélépipède de dimensions: dx, dy, dz . Formons pour cela la somme des moments relatifs à un système d'axes $g\xi, g\eta, g\zeta$ parallèles aux arêtes et dont l'origine est au centre de gravité g du solide, ceci afin d'obtenir les relations que nous avons reconnu devoir exister entre les neuf composantes: R_x, R_y, R_z et $S_{xy}, S_{xz}, S_{yx}, S_{yz}, S_{zx}, S_{zy}$ relatives aux trois éléments superficiels passant par 0. Dans les équations, il faut introduire non les intensités des actions moléculaires, mais leurs grandeurs qui sont proportionnelles aux aires des faces d'application. La somme des moments des forces relatifs à l'axe $g\xi$ parallèle à l'axe Ox est:

$$\left[S_{yx} \frac{dy}{2} + \left(S_{yx} + \frac{dS_{yx}}{dy} dy \right) \frac{dy}{2} \right] dx dz - \left[S_{xy} \frac{dy}{2} + \left(S_{xy} + \frac{dS_{xy}}{dy} dy \right) \frac{dy}{2} \right] dx dz.$$

Cette somme doit être nulle. Et en divisant par le produit $dx dy dz$, il vient:

$$\frac{1}{2} S_{yx} + \frac{1}{2} S_{yx} + \frac{1}{2} \frac{dS_{yx}}{dy} dy - \frac{1}{2} S_{xy} - \frac{1}{2} S_{xy} - \frac{1}{2} \frac{dS_{xy}}{dy} dy = 0,$$

ou encore:

$$S_{yx} - S_{xy} + \frac{1}{2} \frac{dS_{yx}}{dy} dy - \frac{1}{2} \frac{dS_{xy}}{dy} dy = 0,$$

et en négligeant les deux derniers termes qui sont infiniment petits devant les termes finis S_{yx} et S_{xy} , on peut écrire:

$$S_{yx} - S_{xy} = 0, \quad \text{ou finalement:} \quad S_{yx} = S_{xy}.$$

En annulant de même les sommes des moments relatifs aux deux autres axes: $g\xi$ et $g\eta$ parallèles aux axes Ox et Oy menés par le centre de gravité g du solide, on obtient les relations analogues:

$$S_{zy} = S_{yz}, \quad \text{et} \quad S_{xz} = S_{zx}.$$

En définitive, on arrive aux trois conditions:

$$S_{yx} = S_{xy}, \quad S_{zy} = S_{yz}, \quad S_{xz} = S_{zx}. \quad \} \quad (6)$$

Six quantités sont donc nécessaires pour définir complètement l'état élastique du corps en un point donné 0. Ce sont: R_x, R_y, R_z et S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} . Formons maintenant les trois autres conditions d'équilibre en égalant à zéro la somme des composantes suivant les axes Ox, Oy, Oz . Nous ne pouvons plus ici négliger les forces extérieures qui agissent sur la masse du corps, car ces forces sont du même ordre que les variations des actions moléculaires relatives à deux faces opposées. Soient X, Y, Z les composantes de la résultante de ces forces extérieures rapportées à l'unité de volume. Dans chaque équation, les termes contenant $R_x, R_y, R_z, S_{xy}, S_{yz}, S_{zx}, S_{yx}, S_{zy}, S_{xz}$ s'annulent deux à deux, il ne reste donc que les dérivées partielles du premier ordre des actions moléculaires. Nous obtenons ainsi les expressions:

$$\frac{dR_x}{dx} dx dy dz + \frac{dS_{yx}}{dy} dx dy dz + \frac{dS_{zx}}{dz} dx dy dz + X dx dy dz = 0 \quad \text{pour les forces parallèles à l'axe } Ox,$$

$$\frac{dS_{xy}}{dx} dx dy dz + \frac{dR_y}{dy} dx dy dz + \frac{dS_{zy}}{dz} dx dy dz + Y dx dy dz = 0 \quad \text{" " " } Oy,$$

$$\frac{dS_{xz}}{dx} dx dy dz + \frac{dS_{yz}}{dy} dx dy dz + \frac{dR_z}{dz} dx dy dz + Z dx dy dz = 0 \quad \text{" " " } Oz.$$

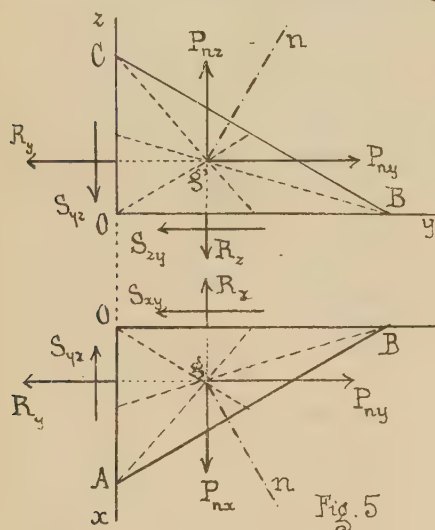
En supprimant le facteur $dx dy dz$, volume du solide élémentaire, on a:

$$\left. \begin{aligned} X + \frac{dR_x}{dx} + \frac{dS_{yx}}{dy} + \frac{dS_{zx}}{dz} &= 0 \\ Y + \frac{dS_{xy}}{dx} + \frac{dR_y}{dy} + \frac{dS_{zy}}{dz} &= 0 \\ Z + \frac{dS_{xz}}{dx} + \frac{dS_{yz}}{dy} + \frac{dR_z}{dz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Les équations expriment évidemment aussi l'équilibre de toute portion finie du corps qui serait décomposable en parallélépipèdes élémentaires ayant leurs facettes parallèles aux plans de coordonnées. Mais, en général, cette décomposition laisse des résidus tétraédriques dont les conditions d'équilibre doivent être cherchées à leur tour. Les résidus ne seraient négligeables que si, la pression se transmettant intégralement et normalement dans toute la masse, l'orientation des éléments superficiels n'avait pas d'influence; mais cette transmission intégrale et normale de la pression, qui caractérise les fluides, n'a pas lieu dans les solides.

§ 6 — Équations d'équilibre d'un tétraèdre infiniment petit. —

La figure 5 représente un tétraèdre trirectangle en projections horizontale et verticale. Supposons connues les intensités des actions moléculaires agissant en O dans les trois plans zOy, xOz, yOx . Proposons-nous de calculer l'intensité de l'action moléculaire relative à la face ABC opposée au sommet O. Soit P_n cette intensité dont les composantes suivant les axes Ox, Oy, Oz sont: P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} , n désignant la normale extérieure à la face ABC considérée et $d\Omega$ l'aire de cette face. Les aires des trois autres faces du tétraèdre sont les projections de $d\Omega$ sur les plans de coordonnées; on les obtient en multipliant $d\Omega$ par le cosinus de l'angle aigu des deux plans, qui est égal à l'angle aigu des deux normales aux plans.



Considérons, par exemple, l'angle formé par la normale n à $d\Omega$ avec l'axe des x . Nous le désignerons par $(\widehat{nx})$. En égalant à zéro la somme des composantes suivant les axes Ox, Oy, Oz , nous trouvons, en appliquant la convention faite précédemment sur les signes et en supprimant le facteur commun $d\Omega$:

$$\left. \begin{aligned} P_{nx} &= R_x \cos(\widehat{nx}) + S_{yx} \cos(\widehat{ny}) + S_{zx} \cos(\widehat{nz}), \\ P_{ny} &= S_{xy} \cos(\widehat{nx}) + R_y \cos(\widehat{ny}) + S_{zy} \cos(\widehat{nz}), \\ P_{nz} &= S_{xz} \cos(\widehat{nx}) + S_{yz} \cos(\widehat{ny}) + R_z \cos(\widehat{nz}). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Si la force considérée se trouve à la périphérie du corps, il faut entendre par P la force extérieure F agissant en ce point sur le corps.

Dans le cas particulier où la force extérieure F est nulle, les équations précédentes deviennent:

$$\left. \begin{aligned} R_x \cos(\widehat{nx}) + S_{yx} \cos(\widehat{ny}) + S_{zx} \cos(\widehat{nz}) &= 0, \\ S_{xy} \cos(\widehat{nx}) + R_y \cos(\widehat{ny}) + S_{zy} \cos(\widehat{nz}) &= 0, \\ S_{xz} \cos(\widehat{nx}) + S_{yz} \cos(\widehat{ny}) + R_z \cos(\widehat{nz}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

§ 7 — Équilibre d'un élément fini. — Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un élément fini, de forme quelconque, du milieu solide sont données par les six équations:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR_x}{dx} + \frac{dS_{yx}}{dy} + \frac{dS_{zx}}{dz} + X &= 0, \\ \frac{dS_{xy}}{dx} + \frac{dR_y}{dy} + \frac{dS_{zy}}{dz} + Y &= 0, \\ \frac{dS_{xz}}{dx} + \frac{dS_{yz}}{dy} + \frac{dR_z}{dz} + Z &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

puis

$$\left. \begin{aligned} P_{nx} &= R_x \cos(\widehat{nx}) + S_{yx} \cos(\widehat{ny}) + S_{zx} \cos(\widehat{nz}), \\ P_{ny} &= S_{xy} \cos(\widehat{nx}) + R_y \cos(\widehat{ny}) + S_{zy} \cos(\widehat{nz}), \\ P_{nz} &= S_{xz} \cos(\widehat{nx}) + S_{yz} \cos(\widehat{ny}) + R_z \cos(\widehat{nz}). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Soient V la portion finie de volume, P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} les composantes de l'intensité moléculaire suivant les axes Ox, Oy, Oz , les composantes X, Y, Z des forces extérieures sollicitant la portion considérée satisfont aux

six équations d'équilibre:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X + \Sigma P_{nx} &= 0, \\ \Sigma Y + \Sigma P_{ny} &= 0, \\ \Sigma Z + \Sigma P_{nz} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (12) \quad \left. \begin{aligned} \Sigma (zY - yZ) + \Sigma (zP_{ny} - yP_{nz}) &= 0, \\ \Sigma (xZ - zX) + \Sigma (xP_{nz} - zP_{nx}) &= 0, \\ \Sigma (yX - xY) + \Sigma (yP_{nx} - xP_{ny}) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

car si nous prenons la première des équations (10) et si nous multiplions tous ses termes par $dx dy dz$, et si nous intégrons dans toute l'étendue de $\mathcal{V}$, nous obtenons:

$$\iiint \frac{dR_x}{dx} dx dy dz + \iiint \frac{dS_{yx}}{dy} dx dy dz + \iiint \frac{dS_{zx}}{dz} dx dy dz + \iiint X dx dy dz = 0.$$

Dans l'intégrale triple en R_x , on peut faire l'intégration en x , ce qui donne:

$$\iiint \frac{dR_x}{dx} dx dy dz = \iint R_x dy dz = \Sigma R_x \cos(\widehat{nx}).$$

La fonction R_x ayant la valeur qui correspond à l'élément de surface. De même:

$$\iiint \frac{dS_{yx}}{dy} dx dy dz = \iint S_{yx} dx dz = \Sigma S_{yx} \cos(\widehat{ny}),$$

$$\iiint \frac{dS_{zx}}{dz} dx dy dz = \iint S_{zx} dx dy = \Sigma S_{zx} \cos(\widehat{nz}),$$

et enfin:

$$\iiint X dx dy dz = \Sigma X.$$

Nous avons donc:

$$\Sigma R_x \cos(\widehat{nx}) + \Sigma S_{yx} \cos(\widehat{ny}) + \Sigma S_{zx} \cos(\widehat{nz}) + \Sigma X = 0$$

ou

$$\Sigma \left[R_x \cos(\widehat{nx}) + S_{yx} \cos(\widehat{ny}) + S_{zx} \cos(\widehat{nz}) \right] + \Sigma X = 0;$$

mais, d'après la première des équations (11), la quantité entre crochets est P_{nx} , donc:

$$\Sigma P_{nx} + \Sigma X = 0,$$

c'est-à-dire la première des équations (12). Les deux autres s'obtiennent de même.

Prenons maintenant la deuxième des équations (10), multiplions la par x , et retranchons en la troisième équation de ce groupe (10) multipliée par y et traitons comme précédemment, nous trouvons:

$$\Sigma \left[(zS_{yx} - yS_{zx}) \cos(\widehat{nx}) + (zR_y - yS_{zy}) \cos(\widehat{ny}) + (zS_{zy} - yR_z) \cos(\widehat{nz}) \right] + \Sigma (zY - yZ) = 0,$$

ou

$$\Sigma \left\{ z \left[S_{yx} \cos(\widehat{nx}) + R_y \cos(\widehat{ny}) + S_{zy} \cos(\widehat{nz}) \right] - y \left[S_{zx} \cos(\widehat{nx}) + S_{zy} \cos(\widehat{ny}) + R_z \cos(\widehat{nz}) \right] \right\} + \Sigma (zY - yZ) = 0,$$

et en ayant égard aux relations (11):

$$\Sigma (zP_{ny} - yP_{nz}) + \Sigma (zY - yZ) = 0,$$

ce qui est la première des équations (13). On aurait de même les deux autres.

§8. Ellipsoïde d'élasticité. — Imaginons un point M et un tétraèdre infiniment petit ayant son sommet en ce point et dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées. Par le point M menons un vecteur représentant en grandeur et en direction la force élastique exercée sur la base, et soient x, y, z les coordonnées de l'extrémité, les formules (11) donnent évidemment:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= R_x \cos(\widehat{nx}) + S_{yx} \cos(\widehat{ny}) + S_{zx} \cos(\widehat{nz}), \\ y_1 &= S_{xy} \cos(\widehat{nx}) + R_y \cos(\widehat{ny}) + S_{zy} \cos(\widehat{nz}), \\ z_1 &= S_{xz} \cos(\widehat{nx}) + S_{yz} \cos(\widehat{ny}) + R_z \cos(\widehat{nz}), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Considérons maintenant les forces élastiques P_1, P_2, P_3 qui s'exercent sur les faces du tétraèdre perpendiculaires aux axes de coordonnées, forces dont les composantes sont respectivement: R_x, S_{yx}, S_{zx} ; S_{xy}, R_y, S_{zy} ; S_{xz}, S_{yz}, R_z ; et prenons ces trois forces P_1, P_2, P_3 pour axes de coordonnées obliques. Les cosinus des angles de la force P_1 ou axe des x' avec les anciens axes sont:

$\frac{R_x}{P_1}, \frac{S_{yx}}{P_1}, \frac{S_{zx}}{P_1}$; et l'on a de même pour les cosinus des angles de l'axe des y' et de l'axe des z' avec les premiers axes: $\frac{S_{xy}}{P_2}, \frac{R_y}{P_2}, \frac{S_{zy}}{P_2}$ et $\frac{S_{xz}}{P_3}, \frac{S_{yz}}{P_3}, \frac{R_z}{P_3}$, ce qui conduit de suite aux relations suivantes entre les anciennes coordonnées et les nouvelles:

$$x_1 = \frac{R_x}{P_1} x'_1 + \frac{S_{yx}}{P_2} y'_1 + \frac{S_{zx}}{P_3} z'_1, \quad y_1 = \frac{S_{xy}}{P_1} x'_1 + \frac{R_y}{P_2} y'_1 + \frac{S_{zy}}{P_3} z'_1, \quad z_1 = \frac{S_{xz}}{P_1} x'_1 + \frac{S_{yz}}{P_2} y'_1 + \frac{R_z}{P_3} z'_1;$$

la comparaison de ces valeurs de x, y, z , avec celles que nous avons écrites plus haut donne :

$$\cos(\widehat{nx}) = \frac{x_1}{P_1}, \quad \cos(\widehat{ny}) = \frac{y_1}{P_2}, \quad \cos(\widehat{nz}) = \frac{z_1}{P_3}.$$

Or :

$$\cos^2(\widehat{nx}) + \cos^2(\widehat{ny}) + \cos^2(\widehat{nz}) = 1,$$

donc :

$$\frac{x_1^2}{P_1^2} + \frac{y_1^2}{P_2^2} + \frac{z_1^2}{P_3^2} = 1 \quad (15)$$

équation d'un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués

Le lieu des extrémités des vecteurs représentant en grandeur et en direction les forces élastiques exercées sur tous les éléments plans menés par un même point M est un ellipsoïde ayant son centre en M, et les trois forces élastiques exercées sur trois éléments plans quelconques rectangulaires entre eux sont trois diamètres conjugués de cette surface appelée ellipsoïde d'élasticité.

Supposons que les trois diamètres conjugués auxquels se trouve rapporté l'ellipsoïde (15) soient les axes de cette surface, les axes des x', y', z' sont rectangulaires comme les axes des x, y, z et les neuf cosinus des angles que font entre eux les deux systèmes doivent vérifier les relations :

$$\begin{aligned} \frac{R_x^2}{P_1^2} - \frac{S_{xy}^2}{P_1^2} - \frac{S_{xz}^2}{P_1^2} &= 1, & \frac{R_x^2}{P_1^2} - \frac{S_{xy}^2}{P_1^2} - \frac{S_{xz}^2}{P_1^2} &= 1, \\ \frac{S_{xy}^2}{P_1^2} - \frac{R_y^2}{P_2^2} - \frac{S_{yz}^2}{P_2^2} &= 1, & \frac{S_{xy}^2}{P_1^2} - \frac{R_y^2}{P_2^2} - \frac{S_{yz}^2}{P_2^2} &= 1, \\ \frac{S_{xz}^2}{P_1^2} - \frac{S_{yz}^2}{P_2^2} - \frac{R_z^2}{P_3^2} &= 1, & \frac{S_{xz}^2}{P_1^2} - \frac{S_{yz}^2}{P_2^2} - \frac{R_z^2}{P_3^2} &= 1, \end{aligned}$$

d'où l'on tire en éliminant les R_x, R_y, R_z :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{P_2^2} - \frac{1}{P_1^2}\right) S_{xy}^2 + \left(\frac{1}{P_3^2} - \frac{1}{P_1^2}\right) S_{xz}^2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{P_3^2} - \frac{1}{P_2^2}\right) S_{yz}^2 + \left(\frac{1}{P_1^2} - \frac{1}{P_2^2}\right) S_{xy}^2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{P_1^2} - \frac{1}{P_3^2}\right) S_{xz}^2 + \left(\frac{1}{P_2^2} - \frac{1}{P_3^2}\right) S_{yz}^2 &= 0, \end{aligned}$$

P_1, P_2, P_3 sont actuellement les axes de l'ellipsoïde d'élasticité.

Supposons :

$$P_1 > P_2 > P_3,$$

la première équation exige que l'on ait : $S_{xy} = 0$ et $S_{xz} = 0$; et les deux autres que : $S_{yz} = 0$.

Les relations qui expriment la rectangularité des deux systèmes d'axes donnent alors :

$$P_1 = R_x, \quad P_2 = R_y, \quad P_3 = R_z;$$

c'est-à-dire que les forces élastiques P_1, P_2, P_3 suivant lesquelles sont dirigés les axes de l'ellipsoïde sont respectivement perpendiculaires aux éléments plans sur lesquels elles s'exercent.

Ainsi en tout point d'un corps solide, il existe trois éléments plans, rectangulaires entre eux, sur chacun desquels la force élastique s'exerce normalement. Les plans sont les sections principales de l'ellipsoïde d'élasticité, et les trois forces élastiques normales ou forces élastiques principales sont les axes de cet ellipsoïde.

Soient Φ_x, Φ_y, Φ_z les forces élastiques principales, supposées connues au point M, l'équation de l'ellipsoïde d'élasticité rapporté à ses axes est :

$$\frac{x^2}{\Phi_x^2} + \frac{y^2}{\Phi_y^2} + \frac{z^2}{\Phi_z^2} = 1 \quad (16)$$

et on a :

$$R_x = \Phi_x, \quad R_y = \Phi_y, \quad R_z = \Phi_z, \quad \text{et :} \quad S_{xy} = S_{yz} = S_{xz} = 0.$$

Les équations (14) donnent alors :

$$\cos(\widehat{nx}) = \frac{x}{\Phi_x}, \quad \cos(\widehat{ny}) = \frac{y}{\Phi_y}, \quad \cos(\widehat{nz}) = \frac{z}{\Phi_z};$$

et le plan de l'élément a pour équation :

$$\frac{x_1 x}{\Phi_x} + \frac{y_1 y}{\Phi_y} + \frac{z_1 z}{\Phi_z} = 0.$$

il est parallèle au plan tangent à la surface :

$$\frac{x^2}{\Phi_x} + \frac{y^2}{\Phi_y} + \frac{z^2}{\Phi_z} = \pm K^2 \quad (17)$$

au point où le diamètre D, aboutissant au point (x, y, z) sur l'ellipsoïde vient la rencontrer, K^2 étant une quantité positive quelconque.

Si les trois forces élastiques principales sont de même signe c'est-à-dire sont toutes les trois des tractions ou toutes les trois des pressions, la surface (17) est un ellipsoïde concentrique à l'ellipsoïde d'élasticité ayant ses axes dirigés de même façon et respectivement proportionnels aux racines carrées des forces élastiques principales,

et tout demi-diamètre D , de l'ellipsoïde représente une force de même signe que les forces principales. Si les forces élastiques principales sont de signes différents, la surface (17) est l'ensemble de deux hyperboloïdes, l'un à une nappe, l'autre à deux nappes ayant même cône asymptotique:

$$\frac{x^2}{\Phi_x} + \frac{y^2}{\Phi_y} + \frac{z^2}{\Phi_z} = 0 \quad (18)$$

Alors, si le diamètre D , rencontre l'hyperboloïde à une nappe, il représente une force élastique de l'espèce qui est double parmi les forces élastiques principales; s'il rencontre l'hyperboloïde à deux nappes, il représente une force élastique de l'espèce unique. Le passage de l'un des cas à l'autre se fait sur le cône (18). Tout demi-diamètre D , couché sur le cône représente une force élastique tangentielle s'exerçant sur le plan tangent au cône suivant la même arête D . De là le nom de cône des forces élastiques tangentielles ou plus simplement de cône de glissement donné à ce cône (18)

§ 9. — État élastique double au plan — Étudions maintenant l'état élastique double, c'est-à-dire l'état dans lequel la matière en chaque point n'est sollicitée à aucun travail dans une direction déterminée. C'est le cas qui se présente le plus fréquemment dans la pratique. C'est pourquoi nous allons l'étudier plus spécialement. Prenons cette direction pour celle de l'axe Oz , l'état élastique double est donc défini par les relations:

$$R_z = 0, \quad S_{yz} = 0, \quad S_{xz} = 0 \quad \} \quad (19)$$

Des six quantités nécessaires pour définir dans le cas général l'état élastique d'un corps, trois seulement sont ici différentes de zéro, savoir: R_x , R_y et $S_{yx} = S_{xy}$. Et comme maintenant, il ne peut y avoir aucune confusion, nous représenterons simplement par S l'une des deux quantités S_{xy} et S_{yx} .

Proposons-nous de résoudre la question suivante: Étant donné un point d'un corps soumis à un état élastique double quelles sont les sections menées par ce point, pour lesquelles l'intensité de l'action moléculaire atteint une valeur maximum ou minimum.

Il suffit pour cela de considérer des sections parallèles à l'axe Oz . Soit alors un prisme à base triangulaire (fig 6) dont dz est la longueur des arêtes parallèles à l'axe Oz . Les relations (19) montrent de suite que les bases du prisme ne sont sollicitées par aucune force. Les intensités des actions moléculaires agissant sur les faces latérales sont supposées appliquées aux centres de gravité H, I et J des faces respectives $ABA'B'$, $OA'O'A'$ et $OBO'B'$.

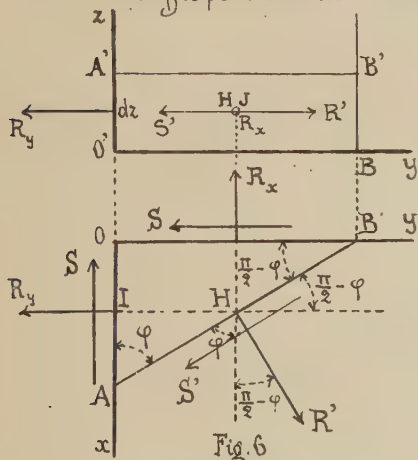


Fig. 6

Force parallèle à l'axe Ox :

$$R' d\Omega \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + S' d\Omega \cdot \cos \varphi - R_x d\Omega \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - S d\Omega \cos \varphi = 0,$$

ou:

$$R' d\Omega \cdot \sin \varphi + S' d\Omega \cdot \cos \varphi - R_x d\Omega \sin \varphi - S d\Omega \cos \varphi = 0.$$

Force parallèle à l'axe Oy :

$$R' d\Omega \cdot \cos \varphi - S' d\Omega \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - R_y d\Omega \cos \varphi - S d\Omega \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 0,$$

ou:

$$R' d\Omega \cdot \cos \varphi - S' d\Omega \cdot \sin \varphi - R_y d\Omega \cos \varphi - S d\Omega \sin \varphi = 0.$$

En supprimant le facteur commun $d\Omega \geq 0$, il vient:

$$R' \sin \varphi + S' \cos \varphi - R_x \sin \varphi - S \cos \varphi = 0, \quad (20)$$

et:

$$R' \cos \varphi - S' \sin \varphi - R_y \cos \varphi - S \sin \varphi = 0. \quad (21)$$

Multiplions l'équation (20) par $\sin \varphi$ et l'équation (21) par $\cos \varphi$, et ajoutons membre à membre, nous obtenons:

$$R'(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - R_x \sin^2 \varphi - R_y \cos^2 \varphi - 2S \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

ou:

$$R'_x \sin^2 \varphi - R'_y \cos^2 \varphi - 2S \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

ce qui donne:

$$R' = R'_x \sin^2 \varphi + R'_y \cos^2 \varphi + 2S \sin \varphi \cos \varphi. \quad (22)$$

Multiplions maintenant l'équation (20) par $\cos \varphi$, et l'équation (21) par $-\sin \varphi$, et ajoutons membre à membre, nous obtenons:

$$S'(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - R'_x \sin \varphi \cos \varphi + R'_y \sin \varphi \cos \varphi - S(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0,$$

ou:

$$S' - R'_x \sin \varphi \cos \varphi + R'_y \sin \varphi \cos \varphi - S(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0,$$

ce qui donne:

$$S' = R'_x \sin \varphi \cos \varphi - R'_y \sin \varphi \cos \varphi + S(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \quad (23)$$

Or:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}, \quad \text{et:} \quad \cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2},$$

puis:

$$2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi, \quad \text{et:} \quad \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi;$$

donc les équations (22) et (23) peuvent respectivement s'écrire:

$$R' = R'_x \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + R'_y \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + S \sin 2\varphi,$$

$$S' = \frac{1}{2} R'_x \sin 2\varphi - \frac{1}{2} R'_y \sin 2\varphi + S \cos 2\varphi;$$

et finalement:

$$\left. \begin{aligned} R' &= \frac{R'_x + R'_y}{2} - \frac{R'_x - R'_y}{2} \cos 2\varphi + S \sin 2\varphi, \\ S' &= \frac{R'_x - R'_y}{2} \sin 2\varphi + S \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Cherchons d'abord le maximum de R' . Pour cela, égalons à zéro la dérivée de R' prise par rapport à l'angle φ , nous trouvons:

$$\frac{dR'}{d\varphi} = 2 \frac{R'_x - R'_y}{2} \sin 2\varphi + 2S \cos 2\varphi = 0, \quad (25)$$

ou:

$$(R'_x - R'_y) \sin 2\varphi + 2S \cos 2\varphi = 0;$$

ce qui donne:

$$\tan 2\varphi = \frac{2S}{R'_y - R'_x}, \quad (26)$$

puis

$$2\varphi = \arctan \frac{2S}{R'_y - R'_x} + n\pi, \quad \text{et en définitive:} \quad \varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2S}{R'_y - R'_x} + n \frac{\pi}{2}, \quad (27)$$

n étant un nombre entier quelconque.

La comparaison des équations (24) et (25) montre que:

$$\frac{dR'}{d\varphi} = 2S',$$

R' est donc maximum ou minimum pour les sections dans lesquelles, on a: $S' = 0$.

De plus, l'équation (27) fait voir qu'il existe au moins deux sections perpendiculaires l'une sur l'autre pour lesquelles R' est maximum ou minimum. Ce sont celles données par les relations:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2S}{R'_y - R'_x}, \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2S}{R'_y - R'_x} + \frac{\pi}{2} \quad (28)$$

Il y a pourtant une exception, c'est quand on a simultanément:

$$S = 0, \quad \text{et:} \quad R'_y - R'_x = 0.$$

Dans ce cas:

$$S' = 0, \quad \text{et:} \quad R' = \frac{1}{2} (R'_x + R'_y);$$

R' ne dépend donc plus de l'angle φ . R' est alors constant pour toute section menée par le point O.

A l'exception de ce cas particulier, nous voyons qu'il existe toujours dans un état élastique double deux sections parallèles à l'axe des z et perpendiculaires l'une sur l'autre pour lesquelles $S' = 0$ et R' passe par un maximum ou un minimum. Les sections qui correspondent aux angles φ_1 et φ_2 constituent les sections principales et les actions moléculaires correspondantes sont les actions moléculaires principales du solide au point considéré. Il nous est maintenant facile de calculer les intensités de ces actions principales. L'équation (26) nous permet d'écrire:

$$\sin 2\varphi = \frac{2S}{\pm \sqrt{4S^2 + (R'_y - R'_x)^2}}, \quad \text{et:} \quad \cos 2\varphi = \frac{R'_y - R'_x}{\pm \sqrt{4S^2 + (R'_y - R'_x)^2}};$$

par suite, en remplaçant $\sin 2\varphi$ et $\cos 2\varphi$ par ces valeurs dans les équations (24), nous obtenons:

$$\text{max. ou min. } R' = \frac{1}{2} (R'_x + R'_y) \pm \frac{\frac{1}{2} (R'_y - R'_x)^2 + 2S^2}{\sqrt{4S^2 + (R'_y - R'_x)^2}}, \quad \text{avec } S' = 0; \quad (29)$$

l'une des valeurs est un maximum, l'autre un minimum.

Lorsque $S = 0$, les axes de coordonnées coïncident avec les actions moléculaires principales, et de plus:

$$R_y = R_x,$$

les actions moléculaires sont égales et toutes les sections passant par le point donné sont des directions principales.

Déterminer maintenant les sections dans lesquelles S' est maximum ou minimum. Pour cela, égalons à zéro la dérivée de S' prise par rapport à l'angle φ , nous avons :

$$\frac{dS'}{d\varphi} = 2 \frac{R_x - R_y}{2} \cos 2\varphi - 2S \sin 2\varphi = (R_x - R_y) \cos 2\varphi - 2S \sin 2\varphi = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{R_x - R_y}{2S}. \quad (30)$$

La comparaison des formules (26) et (30) fait voir que les angles 2φ sont tels que la tangente de l'un est égale à l'opposé de la cotangente de l'autre; les arcs 2φ diffèrent donc de $\frac{\pi}{2}$.

Les sections dans lesquelles S' atteint sa valeur maximum ou minimum forment un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec les sections principales.

L'équation (30) donne :

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{R_x - R_y}{\sqrt{4S^2 + (R_x - R_y)^2}} \quad \text{et} \quad \cos 2\varphi = \pm \frac{2S}{\sqrt{4S^2 + (R_x - R_y)^2}}$$

en remplaçant dans les équations (24) $\sin 2\varphi$ et $\cos 2\varphi$ par ces valeurs, nous trouvons :

$$R' = \frac{1}{2}(R_x - R_y) \mp \frac{1}{2}(R_x - R_y) \times \frac{2S}{\sqrt{4S^2 + (R_x - R_y)^2}} \pm \frac{R_x - R_y}{\sqrt{4S^2 + (R_x - R_y)^2}} \times S = \frac{1}{2}(R_x - R_y), \quad (31)$$

et

$$\text{max. ou min. } S' = \pm \frac{1}{2}(R_x - R_y) \times \frac{R_x - R_y}{\sqrt{4S^2 + (R_x - R_y)^2}} \pm \frac{2S^2}{\sqrt{4S^2 + (R_x - R_y)^2}},$$

ou encore :

$$\text{max. ou min. } S' = \pm \frac{1}{2} \frac{(R_x - R_y)^2 + 4S^2}{\sqrt{4S^2 + (R_x - R_y)^2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4S^2 + (R_x - R_y)^2}. \quad (32)$$

Ces équations (31) et (32) montrent que, d'une part R' n'est nul que si :

$$R_y = -R_x$$

et, d'autre part que les valeurs : max. ou min. S' sont opposées.

Si entre les équations (24), nous éliminons l'angle 2φ , nous trouvons :

$$\sin 2\varphi = \frac{2[(2R' - R_x - R_y)S + (R_x - R_y)S']}{(R_x - R_y)^2 + 4S^2} \quad \text{et} \quad \cos 2\varphi = \frac{R_x^2 - R_y^2 - 2R'R_x + 2R'R_y + 4SS'}{(R_x - R_y)^2 + 4S^2},$$

d'où en faisant la somme des carrés :

$$4[(2R' - R_x - R_y)S + (R_x - R_y)S']^2 + (R_x^2 - R_y^2 - 2R'R_x + 2R'R_y + 4SS')^2 - [(R_x - R_y)^2 + 4S^2]^2 = 0,$$

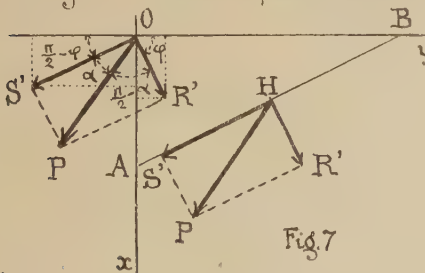
ce qui donne en considérant R' et S' comme variables :

$$[4S^2 + (R_x - R_y)^2]R'^2 + [4S^2 + (R_x - R_y)^2]S'^2 - [4S^2(R_x + R_y) + (R_x^3 + R_y^3) - R_x R_y(R_x + R_y)]R' - [4S^4 + (R_x^2 - 6R_x R_y + R_y^2)S^2 - R_x R_y(R_x - R_y)^2] = 0 \quad (33)$$

Le tableau ci-dessous donne différentes valeurs de R' , S' , $\frac{dR'}{d\varphi}$ et $\frac{dS'}{d\varphi}$, quand φ varie de 0 à π :

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
R'	R_y	$\frac{1}{2}(R_x + R_y) + S$	R_x	$\frac{1}{2}(R_x + R_y) - S$	R_y
S'	S	$\frac{1}{2}(R_x - R_y)$	$-S$	$\frac{1}{2}(R_y - R_x)$	S
$\frac{dR'}{d\varphi}$	$2S$	$R_x - R_y$	$-2S$	$R_y - R_x$	$2S$
$\frac{dS'}{d\varphi}$	$R_x - R_y$	$-2S$	$R_y - R_x$	$2S$	$R_x - R_y$

§10. — Ellipse des actions moléculaires. — Supposons que dans le cas de l'état élastique plan, nous ayons déterminé pour toutes sections parallèles à l'axe des x passant par le point considéré les composantes



R' et S' de l'intensité des actions moléculaires. Formons chaque fois la résultante P (fig. 7) de R' et S' et représentons cette quantité par un vecteur (fig. 8). Le vecteur s pour grandeur :

$$P = \sqrt{R'^2 + S'^2}. \quad (34)$$

A chaque section correspond un vecteur analogue et les extrémités de ce vecteur sont situées sur une certaine courbe dont nous nous proposons de déterminer la nature.

Soient x_1 , les coordonnées de l'extrémité de ce vecteur équipollent du vecteur HP , le théorème des projections permet d'écrire :

$$x_1 = R' \sin \varphi + S' \cos \varphi, \quad \text{et} \quad y_1 = S' \sin \varphi - R' \cos \varphi, \quad (35)$$

en remplaçant R' et S' par leurs valeurs (24), nous trouvons :

$$x_1 = \frac{1}{2}(R_x + R_y) \sin \varphi - \frac{1}{2}(R_x - R_y) \cos 2\varphi \sin \varphi + S \sin 2\varphi \sin \varphi + \frac{1}{2}(R_x - R_y) \sin 2\varphi \cos \varphi + S \cos 2\varphi \cos \varphi,$$

ou :

$$x_1 = \frac{1}{2}(R_x + R_y) \sin \varphi - \frac{1}{2}(R_x - R_y) (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sin \varphi + 2S \sin^2 \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2}(R_x - R_y) \cdot 2 \sin \varphi \cos^2 \varphi + S (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cos \varphi;$$

nous en déduisons :

$$x_1 = \frac{R_x}{2} \sin \varphi (1 + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \frac{R_y}{2} \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + S \cos \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi),$$

et en simplifiant :

$$x_1 = R_x \sin \varphi + S \cos \varphi. \quad (36)$$

De même, nous avons :

$$y_1 = \frac{1}{2}(R_x - R_y) \sin 2\varphi \sin \varphi + S \cos 2\varphi \sin \varphi - \frac{1}{2}(R_x - R_y) \cos \varphi + \frac{1}{2}(R_x - R_y) \cos 2\varphi \cos \varphi - S \sin 2\varphi \cos \varphi,$$

ou :

$$y_1 = \frac{1}{2}(R_x - R_y) \cdot 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi + S (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sin \varphi - \frac{1}{2}(R_x - R_y) \cos \varphi + \frac{1}{2}(R_x - R_y) (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cos \varphi - 2S \sin \varphi \cos^2 \varphi,$$

nous en déduisons :

$$y_1 = \frac{R_x}{2} \cos \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - 1) - \frac{R_y}{2} \cos \varphi (1 + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - S \sin \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi);$$

et en simplifiant :

$$y_1 = -R_y \cos \varphi - S \sin \varphi. \quad (37)$$

Les équations (36) et (37) définissent les coordonnées paramétriques d'un point du lieu cherché. Les équations sont celles d'une ellipse exprimées en fonction du paramètre φ . Nous en déduisons, en effet :

$$\sin \varphi = \frac{R_y x_1 + S y_1}{R_x R_y - S^2}, \quad \text{et} \quad \cos \varphi = \frac{-R_x y_1 - S x_1}{R_x R_y - S^2}, \quad (38)$$

et, en faisant la somme des carrés :

$$\left(\frac{R_y x_1 + S y_1}{R_x R_y - S^2} \right)^2 + \left(\frac{-R_x y_1 - S x_1}{R_x R_y - S^2} \right)^2 = 1. \quad (39)$$

équation d'une ellipse dont le centre est à l'origine des coordonnées. Nous pouvons écrire :

$$(R_y^2 + S^2) x_1^2 + 2(R_y S + R_x S) x_1 y_1 + (S^2 + R_x^2) y_1^2 - (R_x R_y - S^2)^2 = 0,$$

ou :

$$f(x_1, y_1) = (R_y^2 + S^2) x_1^2 + 2S(R_y + R_x) x_1 y_1 + (R_x^2 + S^2) y_1^2 - (R_x R_y - S^2)^2 = 0.$$

Cette ellipse se réduit à un cercle, quand :

$$S = 0, \quad \text{et} \quad R_y = R_x,$$

conditions précédemment trouvées. Le cercle a pour équation :

$$R_x^2 x_1^2 + R_x^2 y_1^2 - R_x^2 = 0,$$

ou simplement :

$$x_1^2 + y_1^2 - 1 = 0.$$

L'équation de l'ellipse que nous venons de trouver donne :

$$\frac{1}{2} f'_{x_1} = (R_y^2 + S^2) x_1 + S(R_y + R_x) y_1, \quad \text{et} :$$

$$\frac{1}{2} f'_{y_1} = S(R_y + R_x) x_1 + (R_x^2 + S^2) y_1;$$

l'équation quadratique des axes est alors :

$$S(R_y + R_x) \left[(R_y^2 + S^2) x_1 + S(R_y + R_x) y_1 \right] - (R_y^2 - R_x^2) \left[(R_y^2 + S^2) x_1 + S(R_y + R_x) y_1 \right] \left[S(R_y + R_x) x_1 + (R_x^2 + S^2) y_1 \right] - S(R_y + R_x) \left[(R_y^2 + S^2) x_1 + S(R_y + R_x) y_1 \right] \left[S(R_y + R_x) x_1 + (R_x^2 + S^2) y_1 \right] = 0,$$

ou encore :

$$S \left[(R_y^2 + S^2) x_1 + S(R_y + R_x) y_1 \right] - (R_y^2 - R_x^2) \left[(R_y^2 + S^2) x_1 + S(R_y + R_x) y_1 \right] \left[S(R_y + R_x) x_1 + (R_x^2 + S^2) y_1 \right] - S \left[(R_y^2 + S^2) x_1 + S(R_y + R_x) y_1 \right] \left[S(R_y + R_x) x_1 + (R_x^2 + S^2) y_1 \right] = 0,$$

c'est-à-dire en ordonnant :

$$\left[S(R_y^2 + S^2) - S(R_y^2 + S^2)(R_y^2 - R_x^2) - S(R_y + R_x)^2 \right] x_1^2 + 2 \left[S(R_y^2 + S^2)(R_y + R_x) - (R_y - R_x)(R_y^2 + S^2)(R_x^2 + S^2) - S^2(R_y^2 + S^2)(R_y - R_x) \right] x_1 y_1 + \left[S^2(R_y + R_x)^2 - S(R_y^2 + S^2)(R_y^2 - R_x^2) - S(R_x^2 + S^2)^2 \right] y_1^2 = 0,$$

finalement :

$$S x_1^2 - (R_y - R_x) x_1 y_1 - S y_1^2 = 0.$$

Les coefficients angulaires des axes sont :

$$\frac{R_x - R_y \pm \sqrt{(R_x - R_y)^2 + 4S^2}}{2S}$$

Il y a bien une infinité d'axes quand :

$$S = 0,$$

avec

$$R_y = R_x,$$

parce que l'ellipse est devenue un cercle.

On peut encore décomposer l'intensité P en deux composantes suivant des intensités parallèles aux axes de coordonnées Ox et Oy . Désignons-les par P_x et P_y . Les coordonnées d'un point du lieu cherché sont précisément P_x et P_y obtenues au moyen des équations (24) en décomposant R' et S' suivant les axes Ox et Oy .

Mais il est plus simple de faire un changement d'axes de coordonnées et de supposer que ceux-ci coïncident avec les directions principales. Dans ce cas, la formule (26) montre que :

$$S = 0,$$

car φ est nul lui-même et les forces qui agissent sur le prisme élémentaire se réduisent à : P_x, P_y, R_x et R_y .

A cet effet, projetons sur cette normale les composantes de P_n sur les axes de coordonnées et formons la somme algébrique des projections, nous obtenons :

$$R_n = P_{nx} \cos(\widehat{nx}) + P_{ny} \cos(\widehat{ny}) + P_{nz} \cos(\widehat{nz}) ;$$

or, d'après les équations (8), que nous reproduisons :

$$P_{nx} = R_x \cos(\widehat{nx}) + S_{yx} \cos(\widehat{ny}) + S_{zx} \cos(\widehat{nz}) ,$$

$$P_{ny} = S_{xy} \cos(\widehat{nx}) + R_y \cos(\widehat{ny}) + S_{zy} \cos(\widehat{nz}) ,$$

$$P_{nz} = S_{xz} \cos(\widehat{nx}) + S_{yz} \cos(\widehat{ny}) + R_z \cos(\widehat{nz}) ;$$

nous en déduisons :

$$R_n = R_x \cos^2(\widehat{nx}) + R_y \cos^2(\widehat{ny}) + R_z \cos^2(\widehat{nz}) + 2S_{xy} \cos(\widehat{nx}) \cos(\widehat{ny}) + 2S_{yz} \cos(\widehat{ny}) \cos(\widehat{nz}) + 2S_{zx} \cos(\widehat{nz}) \cos(\widehat{nx}) . \quad (44)$$

Dans le cas de l'état élastique plan, on a simplement :

$$R_n = R_x \cos^2(\widehat{nx}) + R_y \cos^2(\widehat{ny}) + 2S_{xy} \cos(\widehat{nx}) \cos(\widehat{ny}) . \quad (45)$$

Chapitre II

De l'élasticité — Loi de Hooke.

§ 14. Déformations corrélatives des actions moléculaires — Les conditions d'équilibre des actions moléculaires et toutes leurs conséquences sont applicables à tout corps quelle soit la façon dont il se compose, à condition toutefois que la loi de continuité soit satisfaite. Or nous savons qu'elles ne fournissent que trois équations entre les composantes des actions moléculaires et les forces extérieures, alors que six quantités sont nécessaires pour déterminer l'état élastique d'un corps en un point donné. Cesont : R_x, R_y, R_z et : $S_{xy} = S_{yx}, S_{yz} = S_{zy}, S_{zx} = S_{xz}$. Pour résoudre complètement la question, il faut donc faire intervenir dans le calcul de nouveaux éléments.

Sous l'influence des actions moléculaires, tout corps subit certaines modifications de forme ou déformations. Il doit évidemment exister des relations bien déterminées entre ces déformations et les actions moléculaires corrélatives. La déformation subie par le corps en un point donné est complètement définie, si nous savons de combien le point s'est déplacé dans le sens des trois axes de coordonnées. Si donc, nous connaissons les relations existant entre les déformations et les actions moléculaires correspondantes, nous pouvons exprimer celles-ci en fonction de celles-là, en substituant dans les équations (7), nous aurons un système de trois équations aux dérivées partielles à trois variables indépendantes. Théoriquement, le problème peut donc être résolu, mais pratiquement la résolution de ces équations présente le plus souvent des difficultés insurmontables.

L'expérience seule est donc capable de donner la relation qui existe entre les actions moléculaires et les déformations corrélatives. Pour la déterminer, il faut mesurer les déformations produites par des forces connues sur un corps donné, étudier l'influence des dimensions du corps en question, et conclure de là quelles sont les déformations subies par un parallélépipède infiniment petit.

§ 15. Essai des matériaux à l'extension — L'une des expériences les plus fréquentes consiste à déterminer les déformations subies par une tige métallique qu'on fait travailler à l'extension. On emploie à cet effet une tige d'environ 20 à 25 millimètres de diamètre et de 300 millimètres de longueur. On mesure l'allongement éprouvé par la portion médiane de la tige, comprise entre deux points de repère distants d'environ 100 à 150 millimètres. Cet allongement étant très petit, il faut faire usage d'appareils assez sensibles pour le constater. Indiquons à cet effet l'appareil de Bauschinger qui permet de mesurer les allongements avec une approximation de $\frac{1}{10000}$ de millimètre.

Une telle expérience exécutée sur une éprouvette d'acier doux montre que les allongements sont

proportionnels aux efforts d'extension tant que ceux-ci ne dépassent pas une certaine grandeur; de plus ils disparaissent complètement quand l'effort cesse. Si par contre l'effort d'extension dépasse une certaine limite, les allongements corrélatifs ne disparaissent plus complètement; enfin pour une certaine valeur de la force, la tige se rompt.

§ 16. Elasticité et plasticité. — Comme dans l'exemple précédent, on constate d'une manière générale que les déformations subies par un corps sous l'influence de forces extérieures données sont de diverses natures. Si les forces extérieures cessant de solliciter le corps, les déformations observées précédemment ne subissent aucune modification, on dit que la matière dont est formé le corps est plastique. C'est le cas de l'argile.

Si au contraire, les déformations disparaissent avec la cause qui les produit, la matière du corps est dite parfaitement élastique. C'est le cas du caoutchouc. Si, enfin, les déformations ne disparaissent que partiellement, la matière est semi-élastique. Afin de définir d'une manière précise la notion d'élasticité, nous introduirons le Principe du travail de déformation, en entendant par là le travail mécanique fourni par des forces extérieures pour amener un corps dans un état de déformation donné. Ce travail s'emmagasine dans le corps sous la forme d'énergie potentielle interne. Dans l'exemple précédent, ce travail serait :

$$E = \int F dx, \quad (46)$$

F désignant l'effort d'extension et dx l'allongement corrélatif. Ensuite, nous dirons que :

1°) L'élasticité est la propriété des corps de pouvoir emmagasiner sous forme d'énergie potentielle interne le travail de déformation et de le restituer complètement ou partiellement quand la cause des déformations cesse d'agir.

2°) Un corps est parfaitement élastique lorsqu'il restitue entièrement sous forme d'énergie l'énergie potentielle interne accumulée durant la déformation.

3°) Le degré d'élasticité d'un corps semi-élastique est le rapport de l'énergie restituée, quand la cause de déformation est supprimée, au travail de déformation.

4°) Il n'existe aucun corps qui soit parfaitement élastique quels que soient les efforts auxquels il est soumis.

On appelle limite d'élasticité la limite à partir de laquelle un corps cesse pour un système de forces extérieures donné d'être parfaitement élastique.

Pour une barre de fer doux travaillant à l'extension cette limite est d'environ 1 800 kilogrammes par centimètre carré. Au-dessous de cette limite, le fer doux est parfaitement élastique.

Nous donnons ci-dessous un tableau des limites d'élasticité des différentes qualités d'acier et de fer.

Métaux	kg. par cm ²	Métaux	kg. par cm ²	Métaux	kg. par cm ²
Acier extra dur exceptionnel	> 5 000	Fer commun } long	2 000	Fer fin } long	2 300
Acier très dur	4 500	Fer commun } travers	1 700	Fer fin } travers	2 100
Acier dur	4 100	Fer ordinaire } long	2 100	Fer extra } long	2 400
Acier mi-dur	3 700	Fer ordinaire } travers	1 800	Fer extra } travers	2 200
Acier mi-doux	3 400	Fer fort } long	2 150	Fer spécial de Suède } long	2 000
Acier doux	3 100	Fer fort } travers	1 900	Fer spécial de Suède } travers	1 900
Acier très doux	2 800	Fer fort supérieur... } long	2 200		
Acier extra doux	2 700	Fer fort supérieur... } travers	2 000		

Enfin le temps pendant lequel les forces agissent sur les corps a une influence. Les déformations augmentent avec le temps sur tout si l'état de régime n'a pas été atteint par une application répétée des charges. Quand les forces extérieures sont supprimées, la déformation ne disparaît pas instantanément, le corps ne revient que plus ou moins lentement à sa forme primitive.

§ 17. Loi de Hooke. Déformation d'un prisme travaillant à l'extension ou à la compression — Il résulte des expériences faites sur des éprouvettes de fer doux soumises à des efforts d'extension ou de compression que les allongements observés sont jusqu'à une certaine valeur de l'effort externe, proportionnels à l'effort F qui les produit. On trouve de plus que, pour un même effort, les allongements sont inversement proportionnels à la longueur observée. Si donc, nous appelons dilatation ϵ le quotient de l'allongement $\Delta\lambda$ par la longueur primitive λ , nous pouvons écrire :

$$\epsilon = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \kappa P = \frac{1}{E} \cdot P, \quad (47)$$

E s'appelle le coefficient d'élasticité longitudinal de la matière, $\kappa = \frac{1}{E}$ est le coefficient de souplesse directe.

La dilatation ϵ étant le quotient de deux longueurs est un nombre, il en résulte que E est de même dimension que l'action moléculaire P.

Pour le fer soudé, nous avons : $E = 2\,000\,000$ kg. par centimètre carré.

Pour l'acier doux : " $E = 2\,200\,000$ " " "

Pour le plomb : " $E = 180\,000$ " " "

La valeur de E est la même dans le cas de l'extension et celui de la compression.

Comme nous avons trouvé précédemment : $P = \frac{F}{\Omega}$,

F désignant l'effort totale d'extension ou de compression,

Ω étant la section de la tige, il vient :

$$\epsilon = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{P}{E} = \frac{F}{E\Omega}. \quad (48)$$

Telle est la loi de Hooke.

En dehors de l'allongement de la tige, il se produit dans l'extension une contraction transversale de la section. Dans le cas de la compression, il y a raccourcissement de la tige et augmentation de l'aire de la section. Tant que la limite d'élasticité n'est pas dépassée, cette déformation positive ou négative est proportionnelle à l'effort et par suite à la dilatation positive ou négative. Le coefficient de proportionnalité dépend de la nature de la matière. Il porte le nom de coefficient de contraction transversale. On le désigne par : $\frac{1}{m}$. Il est compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ pour l'acier et le fer : $\frac{1}{4} < \frac{1}{m} < \frac{1}{3}$.

Nous pouvons encore tenir le raisonnement suivant : Soit une tige métallique fixée à l'une de ses extrémités de section constante Ω et de longueur λ , lorsqu'elle n'est soumise à aucune force. Supposons que sous l'action d'une force F appliquée à son extrémité libre la tige soit tirée dans le sens de sa longueur ; cette force étant uniformément répartie sur toute la section droite. Sous cette action, la tige prend une nouvelle longueur x . Si l'on donne à la force F un accroissement dF infiniment petit, la tige s'allonge de dx , et l'on a :

$$dx = \kappa \frac{x}{\Omega} dF = \frac{1}{E} \cdot \frac{x}{\Omega} dF,$$

d'où l'on tire :

$$dF = E \frac{\Omega dx}{x}.$$

L'allongement total ℓ correspondant est donné par :

$$F = \int_{\lambda}^{\lambda+\ell} E \frac{\Omega dx}{x} = E \Omega \int_{\lambda}^{\lambda+\ell} \frac{dx}{x} = E \Omega \left[L \cdot x \right]_{\lambda}^{\lambda+\ell}.$$

Or :

$$\left[L \cdot x \right]_{\lambda}^{\lambda+\ell} = L \cdot (\lambda + \ell) - L \cdot \lambda = L \cdot \frac{\lambda + \ell}{\lambda} = L \left(1 + \frac{\ell}{\lambda} \right),$$

donc :

$$F = E \Omega L \left(1 + \frac{\ell}{\lambda} \right).$$

Si nous développons en série le logarithme népérien, nous trouvons :

$$L \left(1 + \frac{\ell}{\lambda} \right) = \frac{\ell}{\lambda} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^4 + \frac{1}{5} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^5 - \dots$$

comme $\frac{\ell}{\lambda} = \epsilon$ est en général un très petit nombre : $L \left(1 + \frac{\ell}{\lambda} \right)$ est sensiblement égal au premier terme $\frac{\ell}{\lambda}$ de son développement en série et nous pouvons adopter la formule usuelle :

$$F = E \frac{\Omega \ell}{\lambda} = E \Omega \epsilon,$$

ce qui reproduit la loi de Hooke:

puisque $\frac{F}{\Omega} = P$. C'est bien la relation (47) ou la relation (48).

$$\epsilon = \frac{F}{E\Omega} = \frac{P}{E}$$

De ce que le rapport $\frac{1}{\lambda} = \epsilon$ est très petit, E est représenté par un nombre très grand. Nous pouvons d'ailleurs donner une interprétation à la constante E . Si, en effet, dans la formule précédente nous faisons $\Omega = 1$, et $\epsilon = 1$, nous en déduisons:

$$E = F,$$

donc E est la force fictive d'extension capable de doubler la longueur de la tige, dont la section droite serait égale à l'unité de surface. Nous pouvons encore dire que E est la force fictive de compression capable de réduire à zéro la longueur de la tige.

De l'équation:

$$F = E \cdot \frac{\Omega}{\lambda} l,$$

dans laquelle F et l sont supposés comme seules variables, nous déduisons: $dF = E \cdot \frac{\Omega}{\lambda} dl$,

et: $\frac{dF}{dl} = E \cdot \frac{\Omega}{\lambda}$, (49)

la dérivée $\frac{dF}{dl}$ définit la raideur du système.

La raideur d'une tige est proportionnelle à sa section droite et à son coefficient d'élasticité et inversement proportionnelle à sa longueur.

Proposons-nous maintenant d'évaluer le travail $\mathcal{C}$ nécessaire pour accroître la longueur λ de la tige d'une quantité $\Delta\lambda$ très petite par rapport à λ . Soit, à un moment quelconque, x l'allongement de la tige, la tension F correspondante est donnée par la formule:

$$F = E \cdot \frac{\Omega x}{\lambda},$$

et le travail élémentaire $d\mathcal{C}$ correspondant à l'accroissement de longueur dx est $F dx$, donc:

$$d\mathcal{C} = F dx = E \cdot \frac{\Omega}{\lambda} x dx.$$

Le travail total $\mathcal{C}$ est par suite égal à l'intégrale de cette expression entre les limites 0 et $\Delta\lambda$; ce qui donne:

$$\mathcal{C} = \int_0^{\Delta\lambda} E \cdot \frac{\Omega}{\lambda} x dx = E \cdot \frac{\Omega}{\lambda} \int_0^{\Delta\lambda} x dx = \frac{1}{2} E \cdot \frac{\Omega}{\lambda} (\Delta\lambda)^2,$$

ou encore

$$\mathcal{C} = \frac{E \cdot \Omega \times \frac{1}{2} \Delta\lambda}{\lambda} \Delta\lambda. \quad (50)$$

Le travail effectué par la déformation de la tige est donc équivalent au travail d'une force:

$$\frac{E \Omega \times \frac{1}{2} \Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2} E \Omega \times \frac{\Delta\lambda}{\lambda}. \quad (51)$$

dont le point d'application parcourrait un chemin égal à $\Delta\lambda$ dans sa propre direction. Cette formule (50) n'est d'ailleurs exacte que pour de petites valeurs de $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$.

§ 18. Principe de superposition — Les formules précédentes ne suffisent pas pour définir les relations qui existent entre les déformations et les composantes des actions moléculaires dans le cas le plus général puisqu'elles sont tirées d'observations portant sur un état élastique simple. Il faut donc les compléter.

Nous énoncerons le Principe suivant: Toute déformation devant s'ajouter à une déformation déjà existante, tant que la limite d'élasticité n'est pas dépassée ne dépend que des nouvelles forces extérieures appliquées sur le corps; autrement dit: une superposition d'états élastiques différents entraîne la superposition des déformations corrélatives de chacun des états élastiques considérés.

§ 19. Déformations élémentaires d'un parallélépipède infiniment petit

Par déformations élémentaires, nous entendons les six quantités qui définissent complètement la déformation d'un parallélépipède soumis à un état élastique donné, savoir: 1°) les trois déformations longitudinales ou directes, c'est-à-dire les variations de longueur subies par les arêtes et rapportées à l'unité de longueur. Nous donnerons le signe $+$ à ces quantités quand elles représentent des allongements, le signe $-$ lorsqu'elles sont des raccourcissements; 2°) les trois déformations tangentielles ou transversales que l'on peut définir à l'aide des variations subies par les angles primitivement droits des faces. Nous mesurerons ces variations par la tangente trigonométrique de la différence entre l'angle du parallélogramme et 90° .

angle primitif qui était égal à $\frac{\pi}{2}$. On appelle distorsion cette déformation transversale. Dans le cas d'un état élastique linéaire, les angles des faces ne sont pas déformés, seules les arêtes varient.

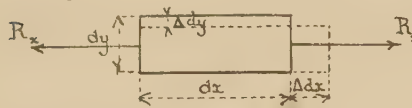


Fig. 10

Soit R_x (fig. 10) l'effort exercé sur le parallélépipède dans le sens de l'une des arêtes; désignons par $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ les déformations longitudinales, en vertu de la loi de Hooke, nous avons dans le sens de cet effort R_x :

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \alpha R_x = \frac{R_x}{E},$$

d'où: $\Delta dx = \alpha R_x dx = \frac{1}{E} R_x dx,$

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{R_x}{E}; \quad (52)$$

et par suite:

mais en même temps, il se produit une variation des arêtes perpendiculaires à la direction R_x , nous avons:

$$\epsilon_y = \epsilon_z = \frac{\Delta dy}{dy} = \frac{\Delta dz}{dz} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{R_x}{E}, \quad (53)$$

en supposant la matière isotrope.

Si de plus, le corps est parfaitement homogène, ces quantités $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ sont indépendantes du point d'application choisi: les deux constantes E et m suffisent alors pour déterminer complètement les relations qui existent entre les déformations et les actions moléculaires. Ici fait, déterminons la variation du volume du parallélépipède. Le volume avant la déformation est: $dx dy dz$, après la déformation, il est:

$dx(1+\epsilon_x) \times dy(1+\epsilon_y) \times dz(1+\epsilon_z)$, c'est-à-dire: $dx dy dz + dx dy dz(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + dx dy dz(\epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z)$
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ étant très petits, nous pouvons négliger leurs produits deux à deux et écrire que le volume après déformation est: $dx dy dz (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$. L'augmentation de volume est: $(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) dx dy dz$,

et l'augmentation de l'unité de volume est: $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = e$ (54)

Cette quantité e est appelée la dilatation cubique du parallélépipède.

En vertu des équations (52) et (53), nous pouvons écrire:

$$e = \frac{R_x}{E} - \frac{1}{m} \cdot \frac{R_x}{E} - \frac{1}{m} \cdot \frac{R_x}{E} = \frac{R_x}{E} \left(1 - \frac{2}{m}\right) = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{R_x}{E} = \frac{m-2}{mE} R_x \quad (55)$$

Comme pour l'extension:

$$e > 0,$$

nous devons

$$m > 2$$

Tout corps pour lequel on aurait:

$$m = 2$$

serait dit incompressible.

En général, on a:

$$3 < m < 4.$$

Quand on a affaire à un état élastique triple, on a:

$$\epsilon_x = \frac{R_x}{E} - \frac{1}{m} \cdot \frac{R_y}{E} - \frac{1}{m} \cdot \frac{R_z}{E},$$

et par suite les trois relations:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left[R_x - \frac{1}{m} (R_y + R_z) \right], \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} \left[R_y - \frac{1}{m} (R_x + R_z) \right], \quad \epsilon_z = \frac{1}{E} \left[R_z - \frac{1}{m} (R_x + R_y) \right] \quad (56)$$

Examinons maintenant les distorsions produites par les composantes tangentielles des actions moléculaires. Supposons le parallélépipède soumis au glissement simple. Ses faces ne sont soumises qu'à des actions tangentielles S (fig. 11). Si nous négligeons les infiniment petits d'ordre supérieur, le volume du parallélépipède ne varie pas. D'après la loi de Hooke, la distorsion γ est proportionnelle à l'action moléculaire S qui la produit, alors:

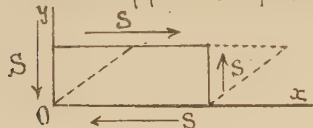


Fig. 11

$$\gamma = \beta S = \frac{1}{G} S \quad (57)$$

β et G sont deux nouvelles constantes dépendant de la nature de la matière, β est appelé le coefficient de souplesse transversale et son inverse G est le coefficient d'élasticité transversale.

Pour l'acier: $\beta = 0,000\,001\,176$, et $G = 850\,000$ kg par centimètre carré.

Pour le fer: $\beta = 0,000\,001\,316$, et $G = 760\,000$ kg " "

γ étant un nombre, G a les mêmes dimensions que S , de sorte que grâce aux unités choisies G est comme E un nombre très grand.

§ 20. Relations entre E, G, α, β et m . — Nous avons vu que les quantités E et m définissent complètement les propriétés élastiques d'un corps isotrope, il existe donc une relation entre: E, G et m .

Pour déterminer cette relation, rappelons qu'un parallélépipède travaillant au glissement simple peut être considéré comme se trouvant dans un état élastique double dont les actions principales sont inclinées de $\frac{\pi}{4}$ sur

faces latérales. Ces deux actions principales sont égales en valeur absolue aux actions tangentielles agissant sur les faces du solide, l'une est positive, l'autre est négative.

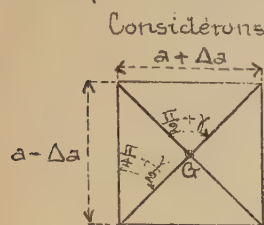


Fig. 12

tales (56), faisons :

nous obtenons :

$$R_x = -R_y = S, \quad \text{et} \quad R_z = 0, \quad \} \quad (58)$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left(S + \frac{1}{m} S \right) = \frac{m+1}{mE} S,$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \left(S + \frac{1}{m} S \right) = \frac{m+1}{mE} S,$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \left(S - S \right) \cdot \frac{1}{m} = 0;$$

donc : $\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\Delta a}{a}$.

mais, d'après la figure 12 :

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\gamma}{2}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \tan \frac{\gamma}{2}}{1 - \tan \frac{\gamma}{2}} = \frac{a + \Delta a}{a - \Delta a},$$

γ étant très petit nous pouvons, sans erreur sensible écrire :

et par suite : $a - \Delta a + a \frac{\gamma}{2} - \Delta a \frac{\gamma}{2} = a + \Delta a - a \frac{\gamma}{2} - \Delta a \frac{\gamma}{2},$

c'est-à-dire :

$$\gamma = 2 \frac{\Delta a}{a} = 2 \frac{m+1}{mE} S, \quad (60)$$

mais, d'autre part, l'équation (57) donne :

$$\gamma = \frac{S}{G}, \quad (61)$$

donc :

$$2 \frac{m+1}{mE} S = \frac{S}{G}, \quad \text{et par suite :}$$

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E. \quad (62)$$

Or, nous avons dit que :

$$3 < m < 4,$$

et comme pour :

$$m = 3,$$

et pour :

$$m = 4,$$

nous voyons que :

$$\frac{3}{8} E < G < \frac{2}{5} E$$

Ceci est bien vérifié pour l'acier et le fer, car :

pour l'acier : $\frac{3}{8} \cdot 2\,200\,000 < 850\,000 < \frac{2}{5} \cdot 2\,200\,000$, c'est-à-dire : $825\,000 < 850\,000 < 880\,000$,

pour le fer : $\frac{3}{8} \cdot 2\,000\,000 < 760\,000 < \frac{2}{5} \cdot 2\,000\,000$, c'est-à-dire : $750\,000 < 760\,000 < 800\,000$.

§ 21. Ellipsoïde des déformations —

Délimitons à l'intérieur du corps une sphère infiniment petite et supposons qu'au centre de la sphère règne un état élastique triple. Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la sphère, les axes étant dirigés parallèlement aux actions principales, ces quantités augmentent ou diminuent dans les rapports indiqués par les formules (56). Si l'on exprime les valeurs primitives x, y, z en fonction des valeurs nouvelles, et si l'on substitue dans l'équation de la sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad (63)$$

on obtient l'équation d'un ellipsoïde

$$\left(\epsilon_x \cdot \frac{x}{\rho} \right)^2 + \left(\epsilon_y \cdot \frac{y}{\rho} \right)^2 + \left(\epsilon_z \cdot \frac{z}{\rho} \right)^2 = 1.$$

C'est l'ellipsoïde des déformations élémentaires. Les déformations dans le sens des axes sont les déformations élémentaires principales.

§ 22. Déformation élémentaire dans une direction quelconque —

Nous bornerons cette recherche au cas de l'état élastique double. Prenons les axes de coordonnées parallèles aux directions principales et choisissons la direction donnée φ comme diagonale d'un rectangle infiniment petit. Calculons l'allongement Δds

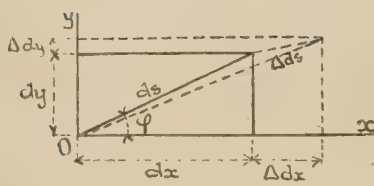


Fig. 13

de la diagonale ds (fig. 13). Nous avons :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

En dérivant, nous obtenons :

$$\Delta ds = \frac{dx \Delta dx + dy \Delta dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds} \Delta x + \frac{dy}{ds} \Delta y.$$

Soit ϵ_φ la déformation élémentaire dans la direction φ , nous avons :

$$\epsilon_\varphi = \frac{\Delta ds}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \frac{\Delta dx}{dx} + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \frac{\Delta dy}{dy} = \epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi, \quad (64)$$

cette expression devient maximum ou minimum pour :

$$\varphi = 0,$$

et

$$\varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{max ou min de } \epsilon_\varphi = \epsilon_x,$$

$$\text{max ou min de } \epsilon_\varphi = \epsilon_y.$$

§ 23. Travail élastique de comparaison — Quand l'état élastique du corps est simple, l'expérience montre quel est l'effort d'extension ou de compression que peut supporter la matière dont est formé le corps sans que la limite d'élasticité soit dépassée ou que la rupture se produise. On convient de ne pas dépasser un certain travail élastique égal à une fraction déterminée de la limite de rupture. Le rapport entre la limite pratique et la limite de rupture porte le nom de coefficient de sécurité. Il n'en est plus de même quand on est dans le cas d'un état élastique double ou triple, car on n'est pas très bien fixé sur les causes déterminantes de la rupture. Selon les uns le danger de rupture dépend uniquement de la grandeur de la plus grande des actions principales tandis que suivant d'autres ce danger dépend non des actions moléculaires, mais des déformations.

Nous comparerons le cas donné à un état élastique linéaire dont la dilatation est égale à la plus grande des déformations élémentaires principales de l'état élastique considéré. Nous appellerons l'intensité de l'action principale de l'état de comparaison le travail élastique de comparaison. Étudions d'abord le cas d'un état élastique double. Soient R_x et R_y les actions moléculaires principales, les déformations élémentaires maxima sont d'après les formules (56), dans lesquelles on suppose :

$$R_z = 0,$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} \left(R_1 - \frac{1}{m} R_2 \right),$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} \left(R_2 - \frac{1}{m} R_1 \right),$$

le travail élastique de comparaison est ici l'effort qui produit une dilatation égale à la plus grande des deux quantités ϵ_1 et ϵ_2 ou, dans le cas où elles sont de signes contraires égale à celle présentant le plus de danger pour la matière. Si donc, T désigne le travail élastique de comparaison, on a : $T_1 = E \epsilon_1$ ou : $T_2 = E \epsilon_2$ c'est-à-dire :

$$T_1 = R_1 - \frac{1}{m} R_2,$$

ou :

$$T_2 = R_2 - \frac{1}{m} R_1.$$

(65)

on adopte pour le travail élastique de comparaison la plus grande des quantités T_1 et T_2 .

Si l'on se trouve dans le cas d'un état élastique triple, on a, d'après les formules (56) :

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} \left[R_1 - \frac{1}{m} (R_2 + R_3) \right],$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} \left[R_2 - \frac{1}{m} (R_3 + R_1) \right],$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} \left[R_3 - \frac{1}{m} (R_1 + R_2) \right],$$

les travaux correspondants sont :

$$T_1 = E \epsilon_1,$$

$$T_2 = E \epsilon_2,$$

$$T_3 = E \epsilon_3,$$

c'est-à-dire :

$$T_1 = R_1 - \frac{1}{m} (R_2 + R_3),$$

$$T_2 = R_2 - \frac{1}{m} (R_3 + R_1),$$

$$T_3 = R_3 - \frac{1}{m} (R_1 + R_2),$$

(66)

on prend pour le travail élastique de comparaison la plus grande des quantités T_1, T_2, T_3 .

§ 24. Énergie potentielle interne du parallélépipède infiniment petit.

Considérons encore le parallélépipède infiniment petit dont les arêtes sont parallèles aux actions principales. Les actions moléculaires qui agissent sur ses faces sont relativement à ce solide des forces extérieures, lorsqu'il se déforme, les points d'application de ces forces se déplacent, les actions moléculaires fournissent donc un certain travail qui s'emmagasiné, sous forme d'énergie potentielle interne à l'intérieur du parallélépipède. C'est ce qu'on appelle aussi travail de déformation. Quand celui-ci est rapporté à l'unité de volume, il est appelé travail spécifique de déformation.

Dans le cas de l'état élastique simple, nous avons trouvé pour ce travail la relation :

$$U = \int_0^{\lambda} F dx$$

Si de plus, le corps obéit à la loi de Hooke, la force F est proportionnelle à x de sorte que si F' désigne la force qui

produit l'allongement $\Delta\lambda$, nous pouvons écrire:

$$F = \frac{F'x}{\Delta\lambda},$$

et l'équation (46) devient:

$$\mathcal{C} = \int_0^{\Delta\lambda} \frac{F'x}{\Delta\lambda} dx = \frac{F'}{\Delta\lambda} \int_0^{\Delta\lambda} x dx = \frac{F'}{\Delta\lambda} \cdot \frac{1}{2} \Delta\lambda^2,$$

et en simplifiant:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} F' \Delta\lambda. \quad (67)$$

Pour obtenir le travail spécifique $\bar{\mathcal{C}}$, il suffit de remplacer F' par P et $\Delta\lambda$ par ϵ , il vient alors:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{C}} &= \frac{1}{2} P \epsilon, & \text{et comme:} & \epsilon = \frac{P}{E}, & \text{d'où:} & P = E \epsilon, \\ \bar{\mathcal{C}} &= \frac{1}{2} E \epsilon^2, & \text{ou encore:} & \bar{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \frac{P^2}{E}. \end{aligned} \quad (68)$$

Si deux des actions principales R_x et R_y sont différentes de zéro, nous obtiendrons $\mathcal{C}$ de la façon suivante. Les déplacements de leurs points d'application ne sont pas autre chose que les déformations élémentaires principales. En vertu des relations (56), nous avons:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left(R_x - \frac{1}{m} R_y \right), \quad \text{et} \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} \left(R_y - \frac{1}{m} R_x \right), \quad (69)$$

obtenues en y faisant:

$$R_z = 0.$$

En négligeant le travail des variations des actions moléculaires d'une face à celle opposée, vis-à-vis celui des actions moléculaires elles-mêmes sur les rectangles de surface $dydz$ agissent deux forces opposées et égales à $R_x dydz$. Le point d'application de chacune d'elles se déplace selon leur propre direction d.c.: $\epsilon_x \frac{dx}{2}$. Le travail fourni est donc égal au chemin multiplié par la valeur moyenne des forces, laquelle est égale à la moitié de la valeur finale. Ceci, parce que les forces extérieures et par suite les actions moléculaires augmentent lentement et progressivement.

Nous avons pour le travail de ces deux forces:

$$\mathcal{C}_x = 2 \left[\frac{1}{2} R_x dydz \times \frac{\epsilon_x dx}{2} \right],$$

ou bien:

$$\mathcal{C}_x = \frac{1}{E} \left[R_x dydz \cdot \frac{1}{2} \left(R_x - \frac{1}{m} R_y \right) dx \right] = \frac{1}{2E} \left(R_x^2 - \frac{1}{m} R_x R_y \right) dx dy dz.$$

De même le travail fourni par l'action R_y est:

$$\mathcal{C}_y = \frac{1}{2E} \left(R_y^2 - \frac{1}{m} R_x R_y \right) dx dy dz;$$

en conséquence, le travail de déformation est:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_x + \mathcal{C}_y = \frac{1}{E} \left[\frac{R_x^2 + R_y^2}{2} - \frac{1}{m} R_x R_y \right] dx dy dz, \quad (70)$$

et le travail spécifique de déformation est obtenu en divisant $\mathcal{C}$ par $dx dy dz$, ce qui donne:

$$\bar{\mathcal{C}} = \bar{\mathcal{C}}_x + \bar{\mathcal{C}}_y = \frac{1}{E} \left[\frac{R_x^2 + R_y^2}{2} - \frac{1}{m} R_x R_y \right]. \quad (71)$$

Si les trois actions principales sont différentes de zéro, nous avons:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left[R_x - \frac{1}{m} (R_y + R_z) \right], \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} \left[R_y - \frac{1}{m} (R_x + R_z) \right], \quad \epsilon_z = \frac{1}{E} \left[R_z - \frac{1}{m} (R_x + R_y) \right];$$

puis:

$$\mathcal{C}_x = \frac{1}{2E} \left[R_x^2 - \frac{1}{m} (R_x R_y + R_x R_z) \right] dx dy dz,$$

$$\mathcal{C}_y = \frac{1}{2E} \left[R_y^2 - \frac{1}{m} (R_y R_x + R_y R_z) \right] dx dy dz,$$

$$\mathcal{C}_z = \frac{1}{2E} \left[R_z^2 - \frac{1}{m} (R_z R_x + R_z R_y) \right] dx dy dz,$$

et finalement:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_x + \mathcal{C}_y + \mathcal{C}_z = \frac{1}{E} \left[\frac{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}{2} - \frac{1}{m} (R_x R_y + R_y R_z + R_z R_x) \right] dx dy dz, \quad (72)$$

avec:

$$\bar{\mathcal{C}} = \bar{\mathcal{C}}_x + \bar{\mathcal{C}}_y + \bar{\mathcal{C}}_z = \frac{1}{E} \left[\frac{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}{2} - \frac{1}{m} (R_x R_y + R_y R_z + R_z R_x) \right]. \quad (73)$$

Chapitre III.

Energie cinétique au point de chute d'un projectile hétérogène.

§ 25. Calcul de l'énergie cinétique — Nous nous proposons maintenant de calculer l'énergie cinétique au point de chute d'un projectile hétérogène constitué par une enveloppe d'acier entièrement remplie de plomb et semblable à ceux expérimentés au polygone du Creusot, comme il a été dit dans l'Avant-propos. Soient : p le poids d'acier, p' le poids de plomb en kilogrammes, v la vitesse restante tangentielle du projectile au point de chute évaluée en mètres-seconde; l'énergie cinétique au point de chute est $\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{g} v^2$ pour l'acier évaluée en kilogrammètres, et elle est $\frac{1}{2} \cdot \frac{p'}{g} v^2$ pour le plomb. Il est bien évident qu'une partie seulement de ces énergies est transformée en chaleur de telle sorte que si μ désigne un nombre compris entre zéro et un : $0 < \mu < 1$, nous pouvons représenter par : $\frac{\mu}{2} \cdot \frac{p}{g} v^2$ et par $\frac{\mu}{2} \cdot \frac{p'}{g} v^2$ les énergies cinétiques de l'acier et du plomb transformées en chaleur.

Si H est l'équivalent mécanique de la chaleur, le nombre de grandes calories ainsi dégagées sont :

$$\frac{\mu}{2H} \cdot \frac{p}{g} v^2 \text{ pour l'acier, et : } \frac{\mu}{2H} \cdot \frac{p'}{g} v^2 \text{ pour le plomb.}$$

Soient encore : c, c' et c'' les chaleurs spécifiques respectives de l'acier coulé et forgé, du plomb solide et du plomb liquide; puis γ la chaleur latente de fusion du plomb; l'élévation de température de l'acier est :

$$t = \frac{\mu}{2cH} \cdot \frac{p}{g} v^2 = \frac{\mu v^2}{2cgH} \quad (74)$$

Si l'élévation de température du plomb n'est pas telle que celui-ci fonde, elle est :

$$t' = \frac{\mu v^2}{2c'gH} \quad (75)$$

Il est bien entendu qu'il faut tenir compte dans une certaine mesure de la variation de la pression à laquelle est soumise le plomb sur la valeur de t' ; nous reviendrons plus loin sur cette particularité. Si, au contraire, l'élévation de température est telle que le plomb fonde, en désignant par θ sa température de fusion, il faut écrire que la chaleur dégagée a été capable d'amener la masse de plomb à cette température θ , puis de le fondre et enfin de porter le plomb liquide à la température finale t' .

On en admettant et ce, sans erreur sensible, que 0° centigrade soit la température initiale, la quantité de chaleur nécessaire pour amener p' de plomb à la température θ est : $p'c'\theta$, celle exigée pour fondre ce plomb est $p'\gamma$ et enfin celle demandée pour amener le plomb liquide à la température finale t' est : $p'c'(t'-\theta)$ de sorte que l'on a :

$$\frac{\mu}{2H} \cdot \frac{p'}{g} v^2 = p' \left[c'\theta + \gamma + c''(t'-\theta) \right],$$

et dans ce cas, on obtient :

$$t' = \frac{1}{c''} \left[\frac{\mu}{2H} \cdot \frac{v^2}{g} - c'\theta - \gamma + c''\theta \right] \quad (76)$$

1^o $t' < \theta$ — Supposons d'abord : $t' < \theta$; si k désigne le coefficient de dilatation cubique de l'acier, k' celui du plomb; ω le poids spécifique de l'acier et ω' celui du plomb, le volume primitif de l'acier est : $\frac{p}{\omega}$, et celui du plomb est $\frac{p'}{\omega'}$. Le volume intérieur primitif de l'acier qui est égal au volume extérieur primitif du plomb est : $\frac{p'}{\omega'}$; le volume intérieur final de l'acier est : $\frac{p'}{\omega'}(1+kt)$. Or le volume extérieur final du plomb, s'il était libre, serait : $\frac{p'}{\omega'}k't'$, tandis que l'augmentation du volume intérieur de l'acier est : $\frac{p'}{\omega'}kt$.

En remplaçant t et t' par leurs valeurs respectives (74) et (75), les augmentations de volume sont :

$$\frac{p'}{\omega'} k \frac{\mu v^2}{2cgH} = \frac{k p' \mu v^2}{2 \omega' c g H} \text{ pour l'acier, et : } \frac{p'}{\omega'} k' \frac{\mu v^2}{2c'gH} = \frac{k' p' \mu v^2}{2 \omega' c' g H} \text{ pour le plomb.}$$

La différence de ces volumes, soit :

$$\frac{p' \mu v^2}{2 \omega' g H} \left(\frac{k'}{c'} - \frac{k}{c} \right) = \frac{p' \mu v^2}{2 \omega' g H} \times \frac{k'c - kc'}{cc'}$$

indique la compression du plomb; et tout se passe comme si le plomb était astreint à une dilatation de :

$$\frac{p' \mu v^2}{2 \omega' g H} \times \frac{k'c - kc'}{cc'} = \frac{p' \mu v^2 (k'c - kc')}{2 \omega' cc' g H};$$

si τ désigne l'élévation correspondante de température, nous pouvons écrire :

$$\frac{p' \mu v^2 (k'c - kc')}{2 \omega' cc' g H} = \frac{p'}{\omega'} k' \tau;$$

ce qui donne :

$$\tau = \frac{p' \mu v^2 (k'c - kc')}{2p'k' \omega' cc' gH} = \frac{\mu v^2 (k'c - kc')}{2k'cc' gH}, \quad (77)$$

et alors la force de compression par unité de surface, c'est-à-dire ici par centimètre carré est :

$$P = k' \tau E' = \frac{k' \mu v^2 (k'c - kc')}{2k'cc' gH} E' = \frac{\mu v^2 (k'c - kc')}{2cc' gH} E', \quad (78)$$

E étant le module d'élasticité du plomb; car, d'après la relation (47), nous avons :

$$F = E \varepsilon,$$

Or ici :

$$F = P, \quad E = E' \quad \text{et} \quad \varepsilon = k' \tau, \quad \text{donc} \quad P = k' \tau E'$$

Remarquons que la formule (78) ne dépend pas de : p, ω, p' et ω' , ce que nous pouvions prévoir, car si la force vive est proportionnelle à la masse, il en est de même de la quantité de chaleur nécessaire pour la porter à une certaine température.

Si dans cette relation (78), nous faisons : $g = 9,81$, $H = 426$, $E' = 180\,000$,

$c = 0,1175$, $c' = 0,0314$, $k = 0,000\,037\,19$, $k' = 0,000\,085\,45$; nous trouvons :

$$t' = 0,003\,8103 \mu v^2, \quad (79) \quad \tau = 0,003\,3672 \mu v^2 \quad (80) \quad P = 0,051\,7909 \mu v^2 \quad (81)$$

Nous en déduisons le tableau de valeurs ci-dessous, dans l'hypothèse : $\mu = 0,5$

v	μv^2	t'	$P \text{ par cm}^2$	v	μv^2	t'	$P \text{ par cm}^2$	v	μv^2	t'	$P \text{ par cm}^2$
50 ^m	1250	4°,8	65 ^{kg}	200 ^m	20000	76°,3	1036 ^{kg}	350 ^m	61250	233°,9	3172 ^{kg}
100	5000	19,1	259	250	31250	119,1	1618	400	80000	305,2	4143
150	11250	43,4	583	300	45000	171,7	2330	414	85698	327,0	4438

Quand $v > 414^m$, on est dans la seconde hypothèse et il faut se servir de la formule (76).

2°) $t' > \theta$ — Supposons maintenant $t' > \theta$, le volume final extérieur du plomb, s'il était libre, serait :

$$\frac{p'}{\omega'} (1 + k' \theta) \left[1 + k'' (t' - \theta) \right] = \frac{p'}{\omega'} (1 + k'' t' - k'' \theta + k' \theta + k' k'' t' \theta - k' k'' \theta^2),$$

ou en négligeant les termes très petits $k' k'' t' \theta$ et $k' k'' \theta^2$:

$$\frac{p'}{\omega'} (1 + k'' t' - k'' \theta + k' \theta) = \frac{p'}{\omega'} [1 + k' \theta + k'' (t' - \theta)].$$

L'augmentation de volume de plomb serait par suite :

$$\frac{p'}{\omega'} [k' \theta + k'' (t' - \theta)],$$

or, en remplaçant t' par sa valeur (76) :

$$\frac{p'}{\omega'} \left\{ k' \theta + k'' \left[\frac{1}{c''} \left(\frac{\mu}{2H} \cdot \frac{v^2}{g} - c' \theta - \gamma + c' \theta \right) - \theta \right] \right\} = \frac{p'}{\omega'} \left[k' \theta + \frac{k''}{c''} \left(\frac{\mu}{2H} \cdot \frac{v^2}{g} - c' \theta - \gamma \right) \right],$$

la différence des volumes indique la compression du plomb, laquelle est :

$$\frac{p'}{\omega'} \left[k' \theta - \frac{k''}{c''} \left(\frac{\mu}{2H} \cdot \frac{v^2}{g} - c' \theta - \gamma \right) \right] - \frac{k p' \mu v^2}{2 \omega' c g H} = \frac{p'}{\omega'} \left[k' \theta - \frac{k''}{c''} \left(\frac{\mu}{2H} \cdot \frac{v^2}{g} - c' \theta - \gamma \right) - \frac{k \mu v^2}{2 c g H} \right].$$

Or, si le plomb subissait une dilatation égale à :

$$\frac{p'}{\omega'} \left[k' \theta - \frac{k''}{c''} \left(\frac{\mu}{2H} \cdot \frac{v^2}{g} - c' \theta - \gamma \right) - \frac{k \mu v^2}{2 c g H} \right]$$

correspondant à une élévation τ de température, k'' étant le coefficient de dilatation cubique du plomb liquide, nous aurions :

$$\frac{p'}{\omega'} \left[k' \theta + \frac{k''}{c''} \left(\frac{\mu}{2H} \cdot \frac{v^2}{g} - c' \theta - \gamma \right) - \frac{k \mu v^2}{2 c g H} \right] = \frac{p'}{\omega'} [k' \theta + k'' (\tau - \theta)] = \frac{p'}{\omega'} k'' \tau + \frac{p'}{\omega'} (k' \theta - k'' \theta),$$

de sorte que :

$$\tau = \frac{1}{k''} \left[\frac{k''}{c''} \left(\frac{\mu}{2H} \cdot \frac{v^2}{g} - c' \theta + c' \theta - \gamma \right) - \frac{k \mu v^2}{2 c g H} \right]. \quad (82)$$

La force de compression par unité de surface est :

$$P = k' \theta E' + k'' (\tau - \theta) E'' = k' \theta E' + k'' \tau E'' - k'' \theta E'',$$

ou :

$$P = k'' \theta E' + \left[\frac{k''}{c''} \left(\frac{\mu}{2H} \cdot \frac{v^2}{g} - c' \theta + c' \theta - \gamma \right) - \frac{k \mu v^2}{2 c g H} \right] E'' - k'' \theta E'', \quad (83)$$

Supposons :

$$k'' = k', \quad \text{et} \quad E'' = E' \quad \text{puis prenons} \quad c' = 0,031, \quad \text{et} \quad c'' = 0,040;$$

nous obtenons les relations :

$$t' = \frac{1}{c''} \left(\frac{\mu}{2H} \cdot \frac{v^2}{g} - c' \theta + c' \theta - \gamma \right) = \frac{\mu v^2}{2 c'' g H} + \frac{\theta (c'' - c')}{c''} - \frac{\gamma}{c''}, \quad (84) \quad \tau = \frac{\mu v^2 (k'c - kc')}{2 k' c c' g H} + \frac{\theta (c'' - c')}{c''} - \frac{\gamma}{c''}, \quad (85)$$

$$P = \frac{\mu v^2 k' E'}{2 c c' g H} - \frac{k \mu v^2 E'}{2 c g H} - \frac{k' \theta (c' - c'') E'}{c''} - \frac{k' \gamma E'}{c''} = \frac{\mu v^2 (k'c - kc') E'}{2 c c' g H} + \frac{k' \theta (c'' - c') E'}{c''} - \frac{k' \gamma E'}{c''} \quad (86)$$

et en effectuant :

$$t' = 0,002\,9911 \mu v^2 + 70,305 - 134,325 = 0,002\,9911 \mu v^2 - 64,020, \quad (87)$$

$$\tau = 0,002\,5479 \mu v^2 + 70,305 - 134,325 = 0,002\,5479 \mu v^2 - 64,020, \quad (88)$$

$$P = 0,0591698 \mu v^2 - 324,692.$$

(89)

Nous en déduisons le tableau de valeurs ci-dessus en supposant: $\mu = 0,5$ et que la température soit inférieure à 1150° , température d'ébullition du plomb.

v	μv^2	t'	P par cm ²	v	μv^2	t'	P par cm ²	v	μv^2	t'	P par cm ²
414 ^m	85 698	327° 0	4 438 ^{kg}	600 ^m	180 000	538°	6 079 ^{kg}	800 ^m	320 000	957°	11 556 ^{kg}
450	101 250	327	4 438	650	211 250	622	7 304	850	361 250	1 081	13 175
500	125 000	327	4 438	700	245 000	733	8 617	900	4 05 000	1 150	14 887
550	151 250	439	4 438	750	276 250	841	10 037				

En résumé, nous avons le tableau récapitulatif suivant:

v	t'	P par cm ²	v	t'	P par cm ²		v	t'	P par cm ²	v	t'	P par cm ²
0 ^m	0°	0 ^{kg}	250 ^m	119° 1	1 618 ^{kg}	} t' ≤ θ	50 ^m	327°	4 438 ^{kg}	700 ^m	733°	8 617 ^{kg}
50	4,8	65	300	171,7	2 330		500	327	4 438	750	841	10 037
100	19,1	259	350	233,9	3 172		550	439	4 943	800	957	11 556
150	43,4	583	400	305,2	4 143		600	538	6 079	850	1 081	13 175
200	76,3	1 036	414	327,0	4 438		650	622	7 304	900	1 150	14 887

Remarquons que dès que la vitesse tangentielle de chute v atteint 600^m, le projectile est soumis à une pression interne dépassant 6 000 kilogrammes par centimètre carré, et ce, dans l'hypothèse de: $\mu = 0,5$

La vitesse v pour laquelle t' = 327°, point de fusion ^{du plomb} la pression ordinaire est de 414^m pour $\mu = 0,5$ et la vitesse v pour laquelle t' = 1150°, point d'ébullition du plomb à la pression ordinaire est de 900^m pour $\mu = 0,5$.

Pour chaque valeur de μ , il y a pour l'énergie cinétique une phase critique. La vitesse peut varier entre deux certaines limites v₁ et v₂ entre lesquelles t' et P conservent des valeurs constantes, l'énergie complémentaire n'est alors utilisée que pour fondre le plomb, et ce n'est que quand la fusion est complète que t' et P recommencent à croître.

§ 26. Remarque — La relation:

$$\gamma = \frac{\Theta}{H} (u' - u) \frac{dp}{d\theta}, \quad (90)$$

due à James Thomson, dans laquelle: γ est la chaleur latente de fusion, Θ la température absolue de fusion: $\Theta = \theta + 273^\circ$, u' le volume spécifique du corps à l'état solide, u le volume spécifique de ce corps à l'état liquide, p la pression qui correspond à la température θ ; et qui est démontrée en thermodynamique, exprime la valeur de la chaleur de fusion γ en fonction de la température absolue Θ de fusion et de la pression p correspondante à laquelle est soumis le corps. Or l'expérience montre que γ est toujours positif; d'autre part Θ est positif, pour tous les corps; donc le signe de $\frac{dp}{d\theta}$ est le même que celui de $u' - u$, donc: $(u' - u) \frac{dp}{d\theta} > 0$,

Par exemple, dans le cas de l'eau: $u' - u < 0$, alors $\frac{dp}{d\theta} < 0$, et un accroissement de pression abaisse la température de fusion et inversement. M. Mousson, en opérant sous une pression de 13 000^{kg} par centimètre carré est parvenu à obtenir de l'eau liquide à -18° .

Pour tout corps qui, au contraire, et le plomb est dans ce cas, augmente de volume en fondant: $u' - u > 0$, alors: $\frac{dp}{d\theta} > 0$ et à un accroissement de la pression correspond une élévation de la température de fusion.

La formule (90) donne $\gamma d\theta = \frac{\Theta}{H} (u' - u) dp$, ou encore: $d\theta = \frac{\Theta}{\gamma H} (u' - u) dp$. (91)

plus γ est grand, plus $d\theta$ est petit. Appliquons cette formule au plomb: en supposant: $\gamma = 5,37$,

$\Theta = 327 + 273 = 600^\circ$, $H = 426$, $u' = 0,095$, $u = 0,080$. Alors: $5,37 = \frac{600 \times 0,015}{5,37} \frac{dp}{d\theta}$,

et il en résulte: $d\theta = \frac{0,021 \times 126}{5,37} dp = 0,00393 dp$.

ce qui donne pour $dp = 5000$ ^{kg}, $d\theta = 19,65$; et pour: $dp = 15000$ ^{kg}, $d\theta = 58,95$;

" $dp = 10000$, $d\theta = 39,30$; " $dp = 20000$, $d\theta = 78,60$.

Le phénomène n'a pas d'influence sensible sur nos calculs et ne modifie pas nos conclusions.

Chapitre IV.

Résistance des enveloppes à parois épaisses.

§ 27. Tube cylindrique soumis à une pression intérieure — Par raison de symétrie, l'un des axes de l'état élastique qui s'établit en un point quelconque de la paroi est parallèle à l'axe même du tube, un autre est dirigé suivant le rayon et le troisième coïncide en direction avec la tangente au cercle passant par le point donné et dont le centre se trouve sur l'axe du tube. Occupons-nous d'abord des actions moléculaires suivant les deux dernières directions dont dépend la rupture.

Supposons que le tube soit ouvert à ses deux extrémités et qu'il puisse se dilater librement dans le sens de son axe. Soit P l'intensité de la pression intérieure et admettons encore que la longueur du tube soit égale à l'unité. Sous l'influence de cette pression le tube se dilate, soit u l'augmentation qu'éprouve la longueur x . Si nous connaissons u en fonction de x , nous pourrions indiquer immédiatement les dilatations radiales et tangentielles ϵ_r et ϵ_t et par suite les actions moléculaires. La question revient donc à déterminer cette fonction de x . Considérons un élément superficiel d'une section transversale du tube (fig. 14), limité par deux arcs de cercle de rayons x et $x+dx$ et deux rayons faisant entre eux l'angle $d\alpha$, et envisageons l'élément de volume correspondant. Cet élément est en équilibre sous l'influence des forces moléculaires. En écrivant les équations qui expriment ces conditions d'équilibre, nous arriverons au résultat cherché.

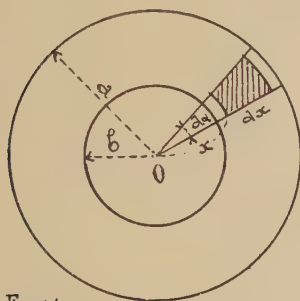


Fig. 14

car la dilatation d'un arc de cercle est proportionnelle à son rayon. Le cercle de rayon x a pour longueur: $2\pi x$ si x augmente de u , $2\pi x$ augmente de $2\pi u$ et nous avons bien:

$$\epsilon_t = \frac{2\pi u}{2\pi x} = \frac{u}{x}.$$

Pour la dilatation radiale, nous avons:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dx}, \quad (93)$$

car dans la déformation, dx varie d'une quantité égale à du . Nous voyons du reste qu'il se produit en réalité un raccourcissement dans le sens radial du , et par suite ϵ_r est négatif. Il est pourtant préférable de ne pas mettre

en évidence le signe $-$, ce signe résultera du calcul dans les applications numériques. C'est pour cette raison que dans la figure ci-contre R_r est indiqué comme faisant travailler la matière à l'extension.

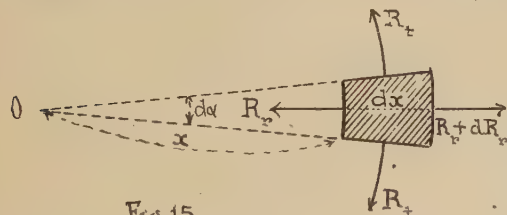


Fig. 15

qui forme avec la bissectrice de l'angle $d\alpha$ un angle égal à:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{d\alpha}{2};$$

la résultante des forces agissant sur ces faces est donc:

$$2R_t dx \sin \frac{d\alpha}{2} = 2R_t dx \cdot \frac{d\alpha}{2} = R_t dx d\alpha.$$

Considérons maintenant les actions moléculaires R_r . La résultante des forces élastiques agissant sur la face interne est: $R_r x d\alpha$ et sur la face externe, l'intensité de ces actions est: $R_r + dR_r$, leur résultante est:

$$(R_r + dR_r)(x + dx) d\alpha.$$

Les deux résultantes agissent en sens contraires; il suffit par suite de considérer leur différence:

$$(R_r + dR_r)(x + dx) d\alpha - R_r x d\alpha = (R_r x + R_r dx + x dR_r + dR_r dx - R_r x) d\alpha,$$

ou, en négligeant le terme $dR_r dx$ qui est du second ordre et en simplifiant:

$$(R_r dx + x dR_r) d\alpha = \frac{d}{d\alpha} (R_r x) dx d\alpha = d(R_r dx) d\alpha$$

Si R_r et la différentielle ci-dessus sont positives, la résultante de toutes les actions moléculaires R_r est une force dirigée vers l'extérieur; la résultante des forces R_t est dirigée au contraire de l'extérieur vers l'intérieur quand les forces R_t sont positives. La condition d'équilibre de l'élément de volume considéré est donc exprimée par la relation:

$$R_t dx d\alpha = \frac{d}{d\alpha} (R_r x) dx d\alpha, \quad (94)$$

ou simplement:

$$R_t = \frac{d}{d\alpha} (R_r x).$$

Comme $R_t = 0$, les formules (56) donnent:

$$\epsilon_t = \frac{1}{E} \left(R_t - \frac{1}{m} R_r \right), \quad \epsilon_r = \frac{1}{E} \left(R_r - \frac{1}{m} R_t \right); \quad (95)$$

ce qui peut s'écrire:

$$m R_t - R_r = m E \epsilon_t,$$

$$-R_t + m R_r = m E \epsilon_r.$$

Nous en déduisons:

$$R_t = \frac{m^2 E \epsilon_t + m E \epsilon_r}{m^2 - 1} = \frac{m E (m \epsilon_t + \epsilon_r)}{m^2 - 1} = \frac{m E}{m^2 - 1} (m \epsilon_t + \epsilon_r),$$

et:

$$R_r = \frac{m^2 E \epsilon_r + m E \epsilon_t}{m^2 - 1} = \frac{m E (m \epsilon_r + \epsilon_t)}{m^2 - 1} = \frac{m E}{m^2 - 1} (m \epsilon_r + \epsilon_t);$$

et en remplaçant ϵ_t et ϵ_r par leurs valeurs respectives (92) et (93)

$$R_t = \frac{m E}{m^2 - 1} \left(m \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} \right), \quad R_r = \frac{m E}{m^2 - 1} \left(m \frac{du}{dx} + \frac{u}{x} \right). \quad (96)$$

Remplaçons maintenant R_t et R_r par ces valeurs dans la relation (94), nous obtenons:

$$\frac{m E}{m^2 - 1} \left(m \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left[\frac{m E}{m^2 - 1} \left(m x \frac{du}{dx} + u \right) \right] = \frac{m E}{m^2 - 1} \frac{d}{dx} \left(m x \frac{du}{dx} + u \right),$$

c'est-à-dire:

$$m \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left(m x \frac{du}{dx} + u \right). \quad (97)$$

Lorsque l'équation (94) contient deux inconnues R_t et R_r , comme il n'est pas possible d'établir une autre équation entre ces deux quantités en se basant sur des considérations purement mécaniques, le problème est et demeure indéterminé. L'indétermination cesse dès qu'on introduit une nouvelle relation basée sur les propriétés élastiques du corps. C'est ainsi que dans le cas qui nous préoccupe, en nous basant sur la loi de Hooke, nous avons été conduit à écrire les relations (96), et nous avons ramené le problème à la détermination de la seule inconnue u . Comme:

$$\frac{d}{dx} \left(m x \frac{du}{dx} + u \right) = m \frac{du}{dx} + m x \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx},$$

l'équation (97) peut s'écrire:

$$m \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} = m \frac{du}{dx} + m x \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx},$$

ou simplement:

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} - u = 0 \quad (98)$$

Pour intégrer cette équation, posons:

$$x = e^t,$$

nous pouvons écrire:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{du}{dt}, \quad \text{car: } dx = e^t dt, \quad \text{et } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t} = e^{-t}$$

et:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \left(-e^{-t} \frac{du}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 u}{dt^2} \right) \frac{dt}{dx} = \left(-e^{-t} \frac{du}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 u}{dt^2} \right) e^{-t} = e^{-2t} \left(-\frac{du}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} \right);$$

l'équation (98) devient:

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} \left(-\frac{du}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} \right) + e^t \cdot e^{-t} \frac{du}{dt} - u = 0,$$

c'est-à-dire:

$$-\frac{du}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} - u = 0,$$

et finalement:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - u = 0. \quad (99)$$

L'équation caractéristique est:

$$r^2 - 1 = 0$$

dont les racines sont -1 et +1, de sorte que l'intégrale générale de l'équation différentielle du second ordre (99) est:

$$u = C e^t + C' e^{-t} = C x + \frac{C'}{x}.$$

Reste à déterminer les deux constantes C et C' . Nous ne pouvons pas indiquer de conditions aux limites pour u . Par contre, nous avons vu que sur la face interne du tube, soit pour: $x = b$, nous avons: $R_r = P$,

tandis que sur la face externe, soit pour: $x = a$, nous avons: $R_r = 0$.

Calculons d'abord R_r en remplaçant u par: $C x + \frac{C'}{x}$; puis, $\frac{du}{dx}$ par: $C - \frac{C'}{x^2}$. La valeur de R_r de (96) devient

$$R_r = \frac{mE}{m^2-1} \left(Cm - \frac{C'm}{x^2} + C + \frac{C'}{x^2} \right) = \frac{mE}{m^2-1} \left[C(m+1) - \frac{C'}{x^2}(m-1) \right],$$

ou encore:

$$R_r = \frac{mE}{m-1} C - \frac{mE}{(m+1)x^2} C' = A - \frac{B}{x^2}, \quad (100)$$

en posant:

$$\frac{mE}{m-1} C = A,$$

et:

$$\frac{mE}{m+1} C' = B.$$

Aux limites sus-indiquées, nous avons: pour $x=a$, $R_r = 0$, c'est-à-dire, $A - \frac{B}{a^2} = 0$,
 " $x=b$, $R_r = P$, " $A - \frac{B}{b^2} = -P$,
 donc: $B = Aa^2$, et par suite: $A - \frac{B}{b^2} = A - \frac{Aa^2}{b^2} = -P$ ce qui donne: $A(b^2 - a^2) = -Pb^2$.

Il en résulte:

$$A = P \frac{b^2}{a^2 - b^2}, \quad \text{et} \quad B = P \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}, \quad (101)$$

et en conséquence:

$$C = P \frac{m-1}{mE} \frac{b^2}{a^2 - b^2}, \quad \text{et} \quad C' = P \frac{m+1}{mE} \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}, \quad (102)$$

finalement:

$$u = P \frac{m-1}{mE} \frac{b^2}{a^2 - b^2} x + P \frac{m+1}{mE} \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \frac{1}{x} = P \frac{b^2}{mE(a^2 - b^2)} \left[(m-1)x + (m+1) \frac{a^2}{x^2} \right] \quad (103)$$

Nous avons donc pour R_r :

$$R_r = P \frac{b^2}{a^2 - b^2} - P \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \frac{1}{x^2} = P \frac{b^2}{a^2 - b^2} \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right) = P \frac{b^2}{a^2 - b^2} \frac{x^2 - a^2}{x^2}.$$

D'ailleurs:

$$R_t = \frac{mE}{m^2-1} \left(mC + m \frac{C'}{x^2} + C - \frac{C'}{x^2} \right) = \frac{mE}{m^2-1} \left[C(m+1) + \frac{C'}{x^2}(m-1) \right],$$

ou encore:

$$R_t = \frac{mE}{m-1} C + \frac{mE}{m+1} \frac{C'}{x^2} = P \frac{b^2}{a^2 - b^2} + P \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \frac{1}{x^2} = P \frac{b^2}{a^2 - b^2} \frac{x^2 + a^2}{x^2}.$$

Donc:

$$R_t = P \frac{b^2(x^2 + a^2)}{x^2(a^2 - b^2)}, \quad \text{et} \quad R_r = P \frac{b^2(x^2 - a^2)}{x^2(a^2 - b^2)}. \quad (104)$$

les formules (104) montrent que R_t et R_r croissent quand x décroît. L'intensité des actions moléculaires atteint donc son maximum sur la face interne du tube. Nous avons du reste:

$$\frac{dR_t}{dx} = -2P \frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2)x^3}, \quad \text{et} \quad \frac{dR_r}{dx} = 2P \frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2)x^3}$$

donc $\frac{dR_t}{dx} < 0$, et $\frac{dR_r}{dx} > 0$; or le signe de R_r a été changé. Les fonctions R_t et R_r sont bien décroissantes.

Nous savons que le travail élastique T de compression qui dépend de la plus grande des déformations est donné par la plus grande des valeurs:

$$T_1 = E[\epsilon_t]_{x=b}, \quad \text{et} \quad T_2 = E[\epsilon_r]_{x=b},$$

d'après la formule (65), il est évidemment, dans le cas présent:

$$T = E[\epsilon_t]_{x=b} = E\left[\frac{u}{x}\right]_{x=b} = EP \frac{b^2}{mE(a^2 - b^2)} \left[m-1 + (m-1) \frac{a^2}{b^2} \right]_{x=b},$$

ou

$$T = \frac{Pb^2}{m(a^2 - b^2)} \left[\frac{(m-1)b^2 + (m+1)a^2}{b^2} \right] = \frac{P}{a^2 - b^2} \left(\frac{m-1}{m} b^2 + \frac{m+1}{m} a^2 \right). \quad (105)$$

de telle sorte que nous avons le groupe de formules générales:

$$R_t = P \frac{b^2(x^2 + a^2)}{x^2(a^2 - b^2)}, \quad R_r = P \frac{b^2(x^2 - a^2)}{x^2(a^2 - b^2)}, \quad T = P \frac{b^2}{m(a^2 - b^2)} \left[m-1 + (m+1) \frac{a^2}{x^2} \right]; \quad (106)$$

et pour $x=b$, il vient:

$$R_t = P \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}, \quad R_r = -P, \quad T = \frac{P}{a^2 - b^2} \left(\frac{m-1}{m} b^2 + \frac{m+1}{m} a^2 \right). \quad (107)$$

Si, en particulier, nous avons:

$$m = \frac{10}{3},$$

cette dernière formule donne pour T :

$$T = \frac{P}{a^2 - b^2} \left(\frac{7}{10} b^2 + \frac{13}{10} a^2 \right) = \frac{P}{10(a^2 - b^2)} (13a^2 + 7b^2). \quad (108)$$

§ 28. — Sphère soumise à une pression intérieure. — Soit U une sphère creuse dont a est le rayon extérieur

et b le rayon intérieur, son épaisseur est donc: $a-b$, considérons une section faite par un plan passant par son centre. Sous l'influence de la pression interne, la sphère se dilate, soit d'une augmentation éprouvée par la longueur x (fig. 16). Soit un élément de volume limité par deux sphères de centre U et de rayons x et $x+dx$, et par deux cônes de même axe, de sommet U et dont les génératrices respectives font entre elles un même angle égal à $d\alpha$. Nous avons, comme précédemment (§ 27):

$$\epsilon_t = \frac{u}{x}, \quad \text{et} \quad \epsilon_r = \frac{du}{dx}.$$

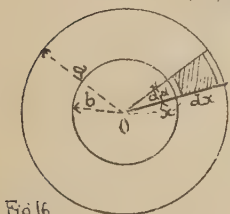


Fig. 16

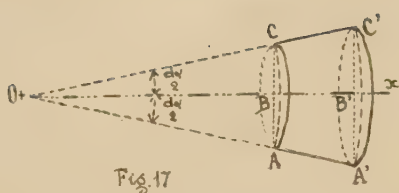


Fig. 17

La composante des actions moléculaires R_r dans le sens du rayon (fig. 17), agissant sur la face intérieure est: $R_r \pi x^2 \left(\frac{d\alpha}{x}\right)^2 = \frac{1}{4} R_r \pi x^2 d\alpha^2$,
 le rayon de base est: $AB = x \frac{d\alpha}{2}$;
 sur la face extérieure, la composante a pour expression:

$$R_r \pi (x+dx)^2 \left(\frac{d\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} R_r \pi (x+dx)^2 d\alpha^2.$$

Comme elles agissent en sens contraires, il suffit de considérer leur différence:

$$\frac{1}{4} R_r \pi (x+dx)^2 d\alpha^2 - \frac{1}{4} R_r \pi x^2 d\alpha^2 = \frac{1}{4} R_r \pi d\alpha^2 [(x+dx)^2 - x^2] = \frac{1}{4} R_r \pi [x^2 + 2x dx + dx^2 - x^2] d\alpha^2 = \frac{1}{4} R_r \pi (2x dx + dx^2) d\alpha^2.$$

en négligeant dx^2

$$\frac{1}{2} R_r \pi x dx d\alpha^2 = \frac{\pi}{2} dx d\alpha^2 \frac{d}{dx} (x^2 R_r).$$

La composante des actions moléculaires R_t tangentielle a pour projection sur le rayon axial Ox:

$$R_t \times \text{surface latérale du tronc de cône } x \frac{d\alpha}{2}, \text{ c'est-à-dire: } R_t \left[\pi (x+dx) \frac{d\alpha}{2} \times (x+dx) \frac{d\alpha}{2} - \pi x \frac{d\alpha}{2} \times x \frac{d\alpha}{2} \right],$$

ou encore:

$$\frac{1}{4} R_t \pi d\alpha^2 [(x+dx)^2 - x^2] = \frac{1}{4} R_t \pi d\alpha^2 (x^2 + 2x dx + dx^2 - x^2),$$

ou en négligeant dx^2

$$\frac{1}{4} \cdot 2 R_t d\alpha^2 x \cdot dx = \frac{1}{2} R_t \pi x dx d\alpha^2.$$

La condition d'équilibre de l'élément de volume considéré est donc ici:

$$\frac{1}{2} R_t \pi x dx d\alpha^2 = \frac{\pi}{2} dx d\alpha^2 \frac{d}{dx} (x^2 R_r), \quad \text{ce qui donne:} \quad R_r x = \frac{1}{2} \frac{d(x^2 R_r)}{dx}. \quad (109)$$

Nous devons maintenant exprimer les inconnues R_t et R_r en fonction de la dilatation u . Dans cet état élastique est triple; mais deux des actions principales sont égales à R_t de sorte qu'en vertu des relations (56), nous pouvons écrire:

$$\epsilon_t = \frac{1}{E} \left[R_t - \frac{1}{m} (R_t + R_r) \right] = \frac{1}{E} \left(\frac{m-1}{m} R_t - \frac{1}{m} R_r \right), \quad \text{et:} \quad \epsilon_r = \frac{1}{E} \left[R_r - \frac{1}{m} (R_t + R_r) \right] = \frac{1}{E} \left(R_r - \frac{2}{m} R_t \right), \quad (110)$$

ce qui donne: $(m-1) R_t - R_r = m E \epsilon_t$,

$$\text{et} \quad -2 R_t + m R_r = m E \epsilon_r$$

d'où nous tirons:

$$R_t = \frac{m^2 E \epsilon_t + m E \epsilon_r}{m(m-1)-2} = \frac{m E}{m^2 - m - 2} (m \epsilon_t + \epsilon_r), \quad \text{et:} \quad R_r = \frac{m(m-1) E \epsilon_r + 2 m E \epsilon_t}{m(m-1)-2} = \frac{m E}{m^2 - m - 2} [(m-1) \epsilon_r + 2 \epsilon_t], \quad (111)$$

mais:

$$\epsilon_t = \frac{u}{x},$$

et:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dx},$$

donc:

$$R_t = \frac{m E}{m^2 - m - 2} \left(m \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} \right), \quad \text{et:} \quad R_r = \frac{m E}{m^2 - m - 2} \left[(m-1) \frac{du}{dx} + \frac{2u}{x} \right] \quad (112)$$

par suite l'équation (109) devient:

$$\frac{m E}{m^2 - m - 2} \left(m u + x \frac{du}{dx} \right) = \frac{1}{2} \frac{m E}{m^2 - m - 2} \frac{d}{dx} \left[(m-1) x^2 \frac{du}{dx} + 2 u x \right].$$

c'est-à-dire successivement:

$$m u + x \frac{du}{dx} = (m-1) x \frac{du}{dx} + \frac{m-1}{2} x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x \frac{du}{dx},$$

$$\frac{m-1}{2} x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + (m-1) x \frac{du}{dx} - (m-1) u = 0,$$

$$(m-1) x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + 2(m-1) x \frac{du}{dx} - 2(m-1) u = 0;$$

et comme $m \geq 1$, en divisant par $m-1 \geq 0$, nous obtenons l'équation différentielle cherchée:

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + 2x \frac{du}{dx} - 2u = 0 \quad (113)$$

Pour intégrer cette équation, posons

$$x = e^t,$$

$$\text{d'où} \quad \frac{dt}{dx} = e^{-t},$$

et comme:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{du}{dt},$$

$$\text{et} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = \left(-e^{-t} \frac{du}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 u}{dt^2} \right) \frac{dt}{dx} = \left(-e^{-t} \frac{du}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 u}{dt^2} \right) e^{-t} = e^{-2t} \left(-\frac{du}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} \right). \quad \text{l'équation devient:}$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} \left(-\frac{du}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} \right) + 2e^t \cdot e^{-t} \frac{du}{dt} - 2u = 0, \quad \text{ou encore:} \quad -\frac{du}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} + 2 \frac{du}{dt} - 2u = 0,$$

finalement:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} - 2u = 0. \quad (114)$$

L'équation caractéristique est:

$$r^2 + r - 2 = 0,$$

dont les racines sont -2 et +1, de sorte que l'intégrale générale de l'équation différentielle du second ordre (114), est:

$$u = C e^t + C' e^{-2t} = C x + \frac{C'}{x^2}. \quad (115)$$

Reste à déterminer les constantes C et C'. Les conditions imposées aux limites pour u sont:

pour: $x=a$, $R_r = 0$, et pour: $x=b$, $R_r = -P$,
calculons donc R_r en remplaçant u par sa valeur (115) et $\frac{du}{dx}$ par: $\frac{du}{dx} = C - 2 \frac{C'}{x^3}$;

il vient: $R_r = \frac{mE}{m^2 - m - 2} \left[(m-1) \left(C - \frac{2C'}{x^3} \right) + 2C + \frac{2C'}{x^3} \right] = \frac{mE}{m^2 - m - 2} \left[(m+1)C - 2(m-2) \frac{C'}{x^3} \right]$,

et comme: $m^2 - m - 2 = (m+1)(m-2)$, nous avons: $R_r = \frac{mE}{m-2} C - \frac{2mE}{(m+1)x^3} C' = A - \frac{B}{x^3}$, (116)

en posant: $\frac{mE}{m-2} C = A$, et: $\frac{2mE}{m+1} C' = B$.

Aux limites indiquées, pour: $x=a$, nous avons: $R_r = 0$, c'est-à-dire: $A - \frac{B}{a^3} = 0$,

" " " $x=b$, $R_r = -P$, " " $A - \frac{B}{b^3} = -P$,
donc: $B = Aa^3$, $-P = A - \frac{Aa^3}{b^3}$, ou: $-b^3 P = A(b^3 - a^3)$;

par suite: $A = P \frac{b^3}{a^3 - b^3}$, et: $B = P \frac{a^3 b^3}{a^3 - b^3}$, (117)

et alors: $C = P \frac{m-2}{mE} \times \frac{b^3}{a^3 - b^3}$, et: $C' = P \frac{m+1}{2mE} \times \frac{a^3 b^3}{a^3 - b^3}$, (118)

finalement: $u = P \frac{m-2}{mE} \frac{b^3}{a^3 - b^3} x + P \frac{m+1}{2mE} \frac{a^3 b^3}{a^3 - b^3} \frac{1}{x^2} = P \frac{b^3}{mE(a^3 - b^3)} \left[(m-2)x + (m+1) \frac{a^3}{2x^2} \right]$, (119)

Nous en déduisons pour R_r : $R_r = P \frac{b^3}{a^3 - b^3} - P \frac{a^3 b^3}{a^3 - b^3} \frac{1}{x^3} = P \frac{b^3}{a^3 - b^3} \left(1 - \frac{a^3}{x^3} \right) = P \frac{b^3}{a^3 - b^3} \frac{x^3 - a^3}{x^3}$

De même:

$$R_t = \frac{mE}{(m+1)(m-2)} \left[m \left(C + \frac{C'}{x^3} \right) + C - \frac{2C'}{x^3} \right] = \frac{mE}{(m+1)(m-2)} \left[mC + \frac{mC'}{x^3} + C - \frac{2C'}{x^3} \right] = \frac{mE}{(m+1)(m-2)} \left[(m+1)C + (m-2) \frac{C'}{x^3} \right],$$

ou:

$$R_t = \frac{mE}{m-2} C + \frac{mE}{(m+1)x^3} C' = P \frac{mE}{m-2} \frac{m-2}{mE} \frac{b^3}{a^3 - b^3} - P \frac{mE}{m+1} \frac{m+1}{2mE} \frac{a^3 b^3}{a^3 - b^3} \frac{1}{x^3} = P \frac{b^3}{a^3 - b^3} \frac{2x^3 + a^3}{2x^3}.$$

En résumé:

$$R_t = P \frac{b^3(2x^3 + a^3)}{2x^3(a^3 - b^3)}, \quad \text{et:} \quad R_r = P \frac{b^3(x^3 - a^3)}{x^3(a^3 - b^3)} \quad (120)$$

R_t et R_r croissent quand x décroît. L'intensité des actions moléculaires atteint donc son maximum sur la face interne de la sphère creuse. Nous avons, en effet:

$$\frac{dR_t}{dx} = -\frac{3}{2} P \frac{a^3 b^3}{x^4(a^3 - b^3)}, \quad \text{et:} \quad \frac{dR_r}{dx} = 3P \frac{a^3 b^3}{x^4(a^3 - b^3)};$$

Nous avons donc: $\frac{dR_t}{dx} < 0$, et $\frac{dR_r}{dx} > 0$. Or le signe de R_t a été changé donc R_t et R_r sont bien des fonctions décroissantes.

Le travail élastique T de comparaison qui dépend de la plus grande des déformations est, comme nous l'avons vu précédemment:

$$T = E \left[\epsilon_t \right]_{x=b} = E \left[\frac{u}{x} \right]_{x=b} = EP \frac{b^3}{mE(a^3 - b^3)} \left[m-2 + (m+1) \frac{a^3}{2x^3} \right] \quad (121)$$

ou encore:

$$T = \frac{Pb^3}{m(a^3 - b^3)} \left[\frac{2(m-2)x^3 + (m+1)a^3}{2x^3} \right]_{x=b} = \frac{Pb^3}{m(a^3 - b^3)} \left[\frac{2(m-2)b^3 + (m+1)a^3}{2b^3} \right].$$

donc: $T = \frac{P}{a^3 - b^3} \left(\frac{m-2}{m} b^3 + \frac{m+1}{2m} a^3 \right)$. (122)

Nous avons donc, dans le cas de la sphère, le groupe de formules:

$$R_t = P \frac{b^3(2x^3 + a^3)}{2x^3(a^3 - b^3)}, \quad R_r = P \frac{b^3(x^3 - a^3)}{x^3(a^3 - b^3)}, \quad T = P \frac{b^3}{m(a^3 - b^3)} \left[(m-2) + (m+1) \frac{a^3}{2b^3} \right]; \quad (123)$$

et pour $x=b$, nous avons:

$$R_t = P \frac{a^3 + 2b^3}{2(a^3 - b^3)}, \quad R_r = -P, \quad T = \frac{P}{a^3 - b^3} \left(\frac{m-2}{m} b^3 + \frac{m+1}{2m} a^3 \right). \quad (124)$$

Si nous supposons: $m = \frac{10}{3}$, la dernière formule du groupe (124) devient:

$$T = \frac{P}{a^3 - b^3} \left(\frac{4}{10} b^3 + \frac{13}{20} a^3 \right), \quad \text{ou:} \quad T = \frac{P}{20(a^3 - b^3)} (13a^3 + 8b^3). \quad (125)$$

Chapitre V.

Applications numériques.

§ 29. Formules — Dans l'hypothèse: $t' \leq \theta$, avec $\theta = 327^\circ$, point de fusion du plomb, nous avons établi, dans le Chapitre III, les formules suivantes:

$$t' = \frac{\mu v^2}{2c'gH}, \quad z = \frac{\mu v^2(k'c' - kc')}{2k'cc'gH}, \quad P = \frac{\mu v^2(k'c' - kc')}{2cc'gH} E'.$$

Dans l'hypothèse: $327^\circ < t' \leq 1150^\circ$, point d'ébullition du plomb, nous avons établi les relations:

$$t' = \frac{\mu v^2}{2c'gH} + \frac{\theta(c'' - c')}{c''} - \frac{\gamma}{c''}, \quad z = \frac{\mu v^2(k'c' - kc')}{2k'cc'gH} + \frac{\theta(c'' - c')}{c''} - \frac{\gamma}{c''}, \quad P = \frac{\mu v^2(k'c' - kc')}{2cc'gH} E' + \frac{k''\theta(c'' - c')}{c''} E' - \frac{k'\gamma}{c''} E';$$

ce qui donne dans le cas de $t' \leq 327^\circ$:

$$t' = 0,0038103 \mu v^2, \quad z = 0,0033672 \mu v^2, \quad P = 0,0517909 \mu v^2,$$

et en remarquant que si: $\mu = 0,5$ et $v = 414^m$, il vient: $\mu v^2 = 35698$ et $t' = \theta = 327^\circ$.

Dans le cas de: $327^\circ < t' \leq 1150^\circ$, nous avons:

$$t' = 0,0029911 \mu v^2 - 64,020, \quad z = 0,0025479 \mu v^2 - 64,020, \quad P = 0,0391898 \mu v^2 - 984,692.$$

Nous avons vu finalement que pour:

$$m = \frac{10}{3},$$

dans la partie cylindrique du projectile:

$$R_t = P \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}, \quad R_r = -P, \quad \text{et:} \quad T = \frac{P}{10(a^2 - b^2)} (13a^2 + 7b^2);$$

et dans la partie sphérique:

$$R_t = P \frac{a^3 + 2b^3}{2(a^3 - b^3)}, \quad R_r = -P, \quad \text{et:} \quad T = \frac{P}{20(a^3 - b^3)} (13a^3 + 8b^3);$$

Nous en deduisons les tableaux ci-après:

v	t'	z	P	v	t'	z	P			v	t'	z	P	v	t'	z	P
0 ^m	0°	0°	0 ^{kg}	250 ^m	119°	105°	1618 ^{kg}	} t' ≤ 327°	} t' > 327°	450 ^m	327°	327°	4438 ^{kg}	700 ^m	735°	560°	8617 ^{kg}
50	5	4	65	300	172	152	2330			500	327	327	4438	750	841	653	10037
100	19	17	259	350	234	206	3172			550	439	327	4943	800	957	751	11556
150	43	38	583	400	305	269	4143			600	538	395	6079	850	1081	857	13175
200	76	67	1036	414	327	289	4438			650	622	474	7304	900	1150	968	14887

b	a	a² + b²	13a² + 7b²	a³ + 2b³	10a³ + 8b³	b	a	a² + b²	13a² + 7b²	a³ + 2b³	10a³ + 8b³
b	b	a² - b²	10(a² - b²)	2(a³ - b³)	20(a³ - b³)	b	b	a² - b²	10(a² - b²)	2(a³ - b³)	20(a³ - b³)
0	∞	1,000	1,300	0,500	0,650	5/8	8/5	2,282	2,582	0,984	0,989
8/8	8	1,032	1,332	0,503	0,652	3/4	4/3	3,571	3,872	1,595	1,416
4/4	4	1,133	1,433	0,524	0,667	7/8	8/7	7,533	7,833	3,544	2,781
3/8	8/3	1,327	1,627	0,584	0,708	a	1	∞	∞	∞	∞
8/2	2	1,667	1,967	0,714	0,800						

§ 30. Problème — Etant donné un cylindre de rayon extérieur a et de rayon intérieur b , soumis à une pression interne de P kilogrammes par centimètre carré, calculer le rayon intérieur d'une sphère creuse de même rayon extérieur a et soumise à la même pression interne P pour que les actions moléculaires aient les mêmes intensités dans la sphère que dans le cylindre.

Pour le cylindre:

$$R_t = P \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2},$$

et pour la sphère:

$$R_t = P \frac{a^3 + 2b^3}{2(a^3 - b^3)}.$$

Par suite, si x est le rayon intérieur cherché de la sphère, il doit être tel que :

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a^3 + 2x^3}{2(a^3 - x^3)},$$

ou

$$2(a^2 + b^2)a^3 - 2(a^2 + b^2)x^3 = (a^2 - b^2)a^3 + 2(a^2 - b^2)x^3,$$

ce qui donne :

$$a^5 + 3a^3b^2 - 4a^2x^3 = 0,$$

ou

$$4x^3 = a^3 + 3ab^2,$$

donc, finalement :

$$x = \sqrt[3]{\frac{a(a^2 + 3b^2)}{4}}$$

(126)

Nous déduisons de cette formule le tableau ci-après :

b	x	x	b	x	x
$\frac{a}{8}$	$a\sqrt[3]{\frac{57}{256}}$	0,639 6a	$\frac{5a}{8}$	$a\sqrt[3]{\frac{139}{256}}$	0,815 8a
$\frac{a}{4}$	$a\sqrt[3]{\frac{19}{64}}$	0,667 1a	$\frac{3a}{4}$	$a\sqrt[3]{\frac{43}{64}}$	0,875 9a
$\frac{3a}{8}$	$a\sqrt[3]{\frac{91}{256}}$	0,708 4a	$\frac{7a}{8}$	$a\sqrt[3]{\frac{211}{256}}$	0,937 6a
$\frac{a}{2}$	$a\sqrt[3]{\frac{7}{16}}$	0,759 2a	a	a	a

le tableau montre que pour une même pression interne, la sphère est plus épaisse que le cylindre.

§31. Tables. — Les Tables ci-dessous donnent les valeurs des rayons a et b et des épaisseurs : $a - b$.

1° Table des rayons a et b

Tableaux b	calibre 4 $a = 2$	calibre 8 $a = 4$	calibre 12 $a = 6$	calibre 16 $a = 8$	calibre 20 $a = 10$	calibre 24 $a = 12$	calibre 28 $a = 14$	calibre 32 $a = 16$	calibre 36 $a = 18$	calibre 40 $a = 20$	calibre 44 $a = 22$	calibre 48 $a = 24$	calibre 52 $a = 26$
A	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25
B	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50
C	0,75	1,50	2,25	3,00	3,75	4,50	5,25	6,00	6,75	7,50	8,25	9,00	9,75
D	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00	11,00	12,00	13,00
E	1,25	2,50	3,75	5,00	6,25	7,50	8,75	10,00	11,25	12,50	13,75	15,00	16,25
F	1,50	3,00	4,50	6,00	7,50	9,00	10,50	12,00	13,50	15,00	16,50	18,00	19,50
G	1,75	3,50	5,25	7,00	8,75	10,50	12,25	14,00	15,75	17,50	19,25	21,00	22,75

2° Table des épaisseurs : $a - b$

Tableaux b	calibre 4 $a = 2$	calibre 8 $a = 4$	calibre 12 $a = 6$	calibre 16 $a = 8$	calibre 20 $a = 10$	calibre 24 $a = 12$	calibre 28 $a = 14$	calibre 32 $a = 16$	calibre 36 $a = 18$	calibre 40 $a = 20$	calibre 44 $a = 22$	calibre 48 $a = 24$	calibre 52 $a = 26$
A	1,75	3,50	5,25	7,00	8,75	10,50	12,25	14,00	15,75	17,50	19,25	21,00	22,75
B	1,50	3,00	4,50	6,00	7,50	9,00	10,50	12,00	13,50	15,00	16,50	18,00	19,50
C	1,25	2,50	3,75	5,00	6,25	7,50	8,75	10,00	11,25	12,50	13,75	15,00	16,25
D	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00	11,00	12,00	13,00
E	0,75	1,50	2,25	3,00	3,75	4,50	5,25	6,00	6,75	7,50	8,25	9,00	9,75
F	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50
G	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25

Les tableaux qui suivent donnent les valeurs de R_t et de T pour la partie cylindrique, puis pour la partie sphérique des divers projectiles hétérogènes.

v	t'	P ou $ R_v $	A $b = \frac{a}{8}$		B $b = \frac{a}{4}$		C $b = \frac{3a}{8}$		D $b = \frac{a}{2}$		E $b = \frac{5a}{8}$		F $b = \frac{3a}{4}$		G $b = \frac{7a}{8}$	
			P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T
0	0°	0	1,032	1,332	1,133	1,433	1,327	1,627	1,667	1,967	2,282	2,582	3,571	3,871	7,533	7,833
50	5	65	67	87	74	93	86	106	108	128	148	168	232	254	490	509
100	19	259	267	345	294	371	344	421	431	509	591	669	924	1012	1951	2029
150	43	583	602	777	661	836	774	949	972	1147	1230	1405	2082	2278	4392	4567
200	76	1036	1069	1380	1174	1485	1375	1686	1727	2038	2364	2675	3700	4048	7804	8115
250	119	1618	1670	2155	1834	2319	2147	2632	2697	3182	3692	4178	5779	6322	12188	12674
300	172	2330	2405	3104	2641	3340	3092	3791	3883	4582	5311	6016	8321	9104	17552	18250
350	234	3172	3274	4225	3595	4547	4209	5161	5287	6238	7317	8016	11328	12392	23895	24846
400	305	4143	4276	5519	4696	5939	5498	6741	6905	8148	9454	10697	14769	16187	31209	32452
450	327	4438	4580	5911	5031	6361	5889	7221	7397	8748	10128	11459	15850	17340	33431	34763
450	327	4438	4580	5911	5031	6361	5889	7221	7397	8748	10128	11459	15850	17340	33431	34763
500	327	4438	4580	5911	5031	6361	5889	7221	7397	8748	10128	11459	15850	17340	33431	34763
550	439	4943	5101	6584	5608	7085	6559	8042	8238	9621	11280	12763	17653	19313	37236	38719
600	538	6079	6274	8097	6890	8714	8067	9891	10132	11956	13872	15696	21711	23751	45793	47617
650	622	7304	7538	9729	8278	10470	9692	11824	12174	14365	16668	18859	26186	28537	55021	57212
700	733	8617	8890	11475	9767	12352	11435	14020	14362	17147	19665	22250	30775	33667	64912	67497
750	841	10037	10358	13369	11376	14387	13319	16330	16729	19740	22904	25916	35846	39216	75609	78620
800	957	11556	11926	15393	13098	16564	15335	18302	19260	22727	26371	29838	41171	45150	87051	90518
850	1081	13173	13595	17546	14930	18882	17481	21432	21955	25907	30061	34013	47046	51468	99232	103184
900	1150	14887	15363	19733	16871	21339	19755	24221	24812	29278	33972	38430	53167	58165	112144	116610

Fusion
du Pb.

Table des valeurs de R_t et de T pour la partie sphérique des projectiles hétérogènes

v	t	P ou $ R_t $	A $b = \frac{a}{8}$		B $b = \frac{a}{4}$		C $b = \frac{3a}{8}$		D $b = \frac{a}{2}$		E $b = \frac{5a}{8}$		F $b = \frac{3a}{4}$		G $b = \frac{7a}{8}$	
			R_t	T	R_t	T	R_t	T	R_t	T	R_t	T	R_t	T	R_t	T
0 ^m	0°		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	5	65	33	42	34	43	38	46	46	52	64	64	106	92	220	181
100	19	259	130	169	136	173	151	183	185	207	255	256	413	367	918	720
150	43	583	293	380	305	389	340	413	416	466	574	577	930	826	2066	1621
200	76	1036	521	678	543	691	605	733	740	829	1019	1025	1652	1467	3672	2881
250	119	1618	814	1055	848	1113	945	1146	1155	1294	1592	1600	2582	2291	5734	4500
300	172	2330	1172	1519	1221	1553	1361	1650	1664	1864	2293	2304	3716	3399	8158	6480
350	234	3172	1596	2069	1662	2115	1858	2246	2265	2538	3121	3137	5059	4492	11242	8821
400	305	4143	2084	2701	2171	2849	2420	2933	2964	3314	4077	4097	6608	5866	14683	11521
414	327	4438	2232	2894	2326	2959	2592	3142	3169	3550	4367	4389	7079	6284	15728	12342
450	fusion du Fe 327	4438	2232	2894	2326	2959	2592	3142	3169	3550	4367	4389	7079	6284	15728	12342
500	327	4438	2232	2894	2326	2959	2592	3142	3169	3550	4367	4389	7079	6284	15728	12342
550	439	4943	2486	3236	2590	3295	2887	3500	3529	3955	4864	4889	7284	6999	17518	13746
600	538	6079	3058	3964	3185	4053	3550	4304	4340	4863	5982	6012	9696	8608	21549	16906
650	622	7304	3674	4762	3827	4869	4266	5171	5215	5843	7187	7224	11650	10342	25886	20312
700	733	8617	4334	5618	4515	5745	5032	6101	6153	6894	8479	8522	13744	12212	30539	23964
750	841	10037	5049	6544	5259	6691	5862	7106	7166	8030	9876	9927	16009	14212	35571	27913
800	957	11556	5813	7535	6055	7704	6749	8182	8251	9245	11371	11427	18432	16363	40954	32127
850	1081	13173	6626	8589	6903	8782	7693	9326	9406	10538	12962	13028	21011	18653	46685	36634
900	1150	14887	7488	9745	7801	9925	8694	10460	10629	11910	14649	14723	23745	21080	52760	41401

Les valeurs de Psouignées dans les Tables précédentes sont celles capables de provoquer la rupture de l'enveloppe extérieure d'acier du projectile hétérogène. Dès que ces valeurs sont susceptibles d'être obtenues, l'edit projectile se rompt et fait explosion.

Tel est le phénomène qui s'est produit lors des expériences faites au polygone du Creusot et que nous avons rappelées au début de cette étude.

Chapitre VI.

Tables de Tir spéciales.

§ 32. Emploi des projectiles hétérogènes. — Nous avons montré dans notre première Thèse que l'effet utile d'un coup de canon et le rendement de ce canon sont d'autant meilleurs que, toutes choses étant égales d'ailleurs, le poids du projectile est plus lourd.

Ceci rappelé, soit a le calibre du canon exprimé en mètre, a représente aussi le diamètre du projectile, si h est la hauteur de ce projectile exprimée également en mètre, le volume extérieur V' est :

$$V' = \pi \frac{a^2}{4} h,$$

l'épaisseur étant environ $\frac{1}{5}$ du calibre, le diamètre intérieur du projectile est :

$$a - \frac{2}{5}a = \frac{3}{5}a; \quad \text{et le volume intérieur } V'' \text{ est : } V'' = \pi \frac{9}{100} a^2 h.$$

le volume du métal est donc :

$$V' - V'' = \pi \frac{a^2}{4} h \left(1 - \frac{9}{25}\right) = \pi \frac{a^2}{4} h \times \frac{16}{25} = \pi \frac{4}{25} a^2 h = \frac{4}{25} \pi a^2 h. \quad (127)$$

Or en général :

$$3a \leq h \leq 4a,$$

le volume : $V = V' - V''$ est donc compris entre

$$\frac{4}{25} \pi a^2 \times 3a = \frac{12}{25} \pi a^3 = 1,5 \pi a^3, \quad \text{et} \quad \frac{4}{25} \pi a^2 \times 4a = \frac{16}{25} \pi a^3 = 2 \pi a^3;$$

le poids spécifique du métal employé étant 7800^{kg}, le poids du métal varie entre 11700 a^3 et 15600 a^3

Il est vrai qu'à ce poids, il faut ajouter celui de l'explosif, lequel est environ $\frac{1}{10}$ du poids du métal de sorte que le poids d'un projectile ordinaire pour un canon de calibre a varie entre :

$$12800 a^3 \quad \text{et} \quad 17200 a^3$$

Soit maintenant un projectile hétérogène dans lequel, il y a, par exemple $\frac{4}{5}$ d'acier et $\frac{1}{5}$ de plomb, le poids spécifique moyen est : (fig. 18)

$$\frac{4 \times 7800 + 1 \times 11340}{5} = \frac{42540}{5} = 8500^{\text{kg}},$$

$$\pi \frac{a^2}{4} h \times 8500 = \frac{8500}{4} \pi a^2 h,$$

$$3a \leq h \leq 4a,$$

$$\frac{3}{4} \pi a^2 \times 8500 = \frac{81070}{4} a^3 = 20200 a^3,$$

et :

$$\frac{4}{4} \pi a^2 \times 8500 = 8500 \pi a^3 = 26700 a^3$$

Le calcul montre que pour un canon donné, il est possible de lancer des projectiles hétérogènes beaucoup plus lourds que les projectiles ordinaires.

L'emploi de tels projectiles hétérogènes peut considérablement améliorer l'effet utile d'un coup de canon et le rendement de ce canon. C'est d'ailleurs ce que montrent les Tables comparatives qui suivent.

§ 33. Tables comparatives des Canons 200 080 007, 200 080 011 et 200 080 013.

Les Tables comparatives qui suivent sont établies pour l'angle de portée maximum, soit: $\alpha_m = 51^\circ 50'$. Soit d'abord un canon dont le calibre est de 0^m,200 lançant à la vitesse initiale de 800 mètres en un lieu pour lequel: $z = 0''$ et $\varphi = 45^\circ N$, des projectiles pesant 70^{kg}, 110^{kg} et 130^{kg}, les deux premiers étant homogènes et le dernier hétérogène. Les Tables sont établies d'une part pour des projectiles ordinaires non couffés et d'autre part pour des projectiles couffés. Nous trouvons:

Canon 200 080 007				Canon 200 080 011				Canon 200 080 013			
Projectiles homogènes ordinaires non couffés								Projectile hétérogène non couffé			
$\Lambda = 0,000400$	$N = 6900$	$\Delta = 1,235$	$\Psi = 0,561$	$\Lambda = 0,000255$	$N = 6900$	$\Delta = 1,235$	$\Psi = 0,526$	$\Lambda = 0,000216$	$N = 6900$	$\Delta = 1,235$	$\Psi = 0,511$
$10^6 R = 1,91222$	$P = 31,94$	$10^6 R = 1,14299$	$P = 19,08$	$10^6 R = 0,94057$	$P = 15,81$	$10^6 R = 0,94057$	$P = 15,81$	$10^6 R = 0,94057$	$P = 15,81$	$10^6 R = 0,94057$	$P = 15,81$
$X_m = 19^{km},2$	$S = 2,53$	$X_m = 23^{km},4$	$S = 1,71$	$X_m = 23^{km},4$	$S = 1,71$	$X_m = 23^{km},2$	$S = 1,52$	$X_m = 23^{km},2$	$S = 1,52$	$X_m = 23^{km},2$	$S = 1,52$
$T_m = 79^s$	$\omega_m = 65^\circ 11'$	$T_m = 87^s$	$\omega_m = 64^\circ 16'$	$T_m = 96^s$	$\omega_m = 63^\circ 53'$	$T_m = 96^s$	$\omega_m = 63^\circ 53'$	$T_m = 96^s$	$\omega_m = 63^\circ 53'$	$T_m = 96^s$	$\omega_m = 63^\circ 53'$
$v'_m = 175^m$	$E'_m = 0^{tkm},11$	$v'_m = 200^m$	$E'_m = 0^{tkm},22$	$v'_m = 210^m$	$E'_m = 0^{tkm},22$	$v'_m = 210^m$	$E'_m = 0^{tkm},22$	$v'_m = 210^m$	$E'_m = 0^{tkm},22$	$v'_m = 210^m$	$E'_m = 0^{tkm},22$
$v''_m = 378^m$	$E''_m = 0^{tkm},52$	$v''_m = 416^m$	$E''_m = 0^{tkm},96$	$v''_m = 428^m$	$E''_m = 1^{tkm},20$	$v''_m = 428^m$	$E''_m = 1^{tkm},20$	$v''_m = 428^m$	$E''_m = 1^{tkm},20$	$v''_m = 428^m$	$E''_m = 1^{tkm},20$
$v_m = 417^m$	$E_m = 0^{tkm},62$	$v_m = 462^m$	$E_m = 1^{tkm},20$	$v_m = 477^m$	$E_m = 1^{tkm},51$	$v_m = 477^m$	$E_m = 1^{tkm},51$	$v_m = 477^m$	$E_m = 1^{tkm},51$	$v_m = 477^m$	$E_m = 1^{tkm},51$
$[y_s] = 8^{km},2$	$\mathcal{H} = 885$	$[y_s] = 10^{km},0$	$\mathcal{H} = 791$	$[y_s] = 10^{km},6$	$\mathcal{H} = 759$	$[y_s] = 10^{km},6$	$\mathcal{H} = 759$	$[y_s] = 10^{km},6$	$\mathcal{H} = 759$	$[y_s] = 10^{km},6$	$\mathcal{H} = 759$
$\mathcal{E} = 2,4$	$\mathcal{R} = 2124$	$\mathcal{E} = 3,7$	$\mathcal{R} = 2927$	$\mathcal{E} = 4,3$	$\mathcal{R} = 3264$	$\mathcal{E} = 4,3$	$\mathcal{R} = 3264$	$\mathcal{E} = 4,3$	$\mathcal{R} = 3264$	$\mathcal{E} = 4,3$	$\mathcal{R} = 3264$
Projectiles homogènes non couffés								Projectile hétérogène couffé			
$n = 0,4$	$10^6 R' = 0,76489$	$n = 0,4$	$10^6 R' = 0,45720$	$n = 0,4$	$10^6 R' = 0,37623$	$n = 0,4$	$10^6 R' = 0,37623$	$n = 0,4$	$10^6 R' = 0,37623$	$n = 0,4$	$10^6 R' = 0,37623$
$\tilde{z} = 1,43$	$n\tilde{z} = 0,57$	$\tilde{z} = 1,38$	$n\tilde{z} = 0,55$	$\tilde{z} = 1,37$	$n\tilde{z} = 0,55$	$\tilde{z} = 1,37$	$n\tilde{z} = 0,55$	$\tilde{z} = 1,37$	$n\tilde{z} = 0,55$	$\tilde{z} = 1,37$	$n\tilde{z} = 0,55$
$X'_m = 27^{km},2$	$\chi = 0,92$	$X'_m = 32^{km},4$	$\chi = 0,90$	$X'_m = 34^{km},4$	$\chi = 0,90$	$X'_m = 34^{km},4$	$\chi = 0,90$	$X'_m = 34^{km},4$	$\chi = 0,90$	$X'_m = 34^{km},4$	$\chi = 0,90$
$\omega'_m = 63^\circ 00'$	$u = 1,28$	$\omega'_m = 61^\circ 50'$	$u = 1,25$	$\omega'_m = 61^\circ 25'$	$u = 1,25$	$\omega'_m = 61^\circ 25'$	$u = 1,25$	$\omega'_m = 61^\circ 25'$	$u = 1,25$	$\omega'_m = 61^\circ 25'$	$u = 1,25$
$[v'_m] = 224^m$	$[E'_m] = 0^{tkm},18$	$[v'_m] = 250^m$	$[E'_m] = 0^{tkm},35$	$[v'_m] = 263^m$	$[E'_m] = 0^{tkm},46$	$[v'_m] = 263^m$	$[E'_m] = 0^{tkm},46$	$[v'_m] = 263^m$	$[E'_m] = 0^{tkm},46$	$[v'_m] = 263^m$	$[E'_m] = 0^{tkm},46$
$[v''_m] = 445^m$	$[E''_m] = 0^{tkm},69$	$[v''_m] = 468^m$	$[E''_m] = 1^{tkm},20$	$[v''_m] = 482^m$	$[E''_m] = 1^{tkm},53$	$[v''_m] = 482^m$	$[E''_m] = 1^{tkm},53$	$[v''_m] = 482^m$	$[E''_m] = 1^{tkm},53$	$[v''_m] = 482^m$	$[E''_m] = 1^{tkm},53$
$[v_m] = 498^m$	$[E_m] = 0^{tkm},87$	$[v_m] = 531^m$	$[E_m] = 1^{tkm},57$	$[v_m] = 548^m$	$[E_m] = 1^{tkm},99$	$[v_m] = 548^m$	$[E_m] = 1^{tkm},99$	$[v_m] = 548^m$	$[E_m] = 1^{tkm},99$	$[v_m] = 548^m$	$[E_m] = 1^{tkm},99$
$\mathcal{E}' = 3,4$	$\mathcal{R}' = 3009$	$\mathcal{E}' = 5,1$	$\mathcal{R}' = 4034$	$\mathcal{E}' = 5,8$	$\mathcal{R}' = 4402$	$\mathcal{E}' = 5,8$	$\mathcal{R}' = 4402$	$\mathcal{E}' = 5,8$	$\mathcal{R}' = 4402$	$\mathcal{E}' = 5,8$	$\mathcal{R}' = 4402$

§ 34. Tables comparatives des Canons 360 160 033, 360 160 057 et 360 160 069

Pour le même lieu que précédemment pour lequel: $z = 0''$ et $\varphi = 45^\circ N$ et pour l'angle: $\alpha_m = 51^\circ 50'$, les tables de tir d'un canon de 0^m,360 lançant à la vitesse initiale de 1600^m des projectiles pesant 330^{kg}, 570^{kg} et 690^{kg}, les premiers étant homogènes et le dernier hétérogène sont:

Canon 360 160 033				Canon 360 160 057				Canon 360 160 069			
Projectiles homogènes ordinaires non coiffés								Projectile hétérogène non coiffé			
$\Lambda = 0,000153$	$N = 3450$	$\Delta = 1,235$	$\Psi = 0,224$	$\Lambda = 0,000089$	$N = 3450$	$\Delta = 1,235$	$\Psi = 0,161$	$\Lambda = 0,000073$	$N = 3450$	$\Delta = 1,235$	$\Psi = 0,144$
$10^{10}R = 0,14602$	$P = 39,02$	$10^{10}R = 0,06105$	$P = 16,31$	$10^{10}R = 0,04479$	$P = 11,99$	$10^{10}R = 0,04479$	$P = 11,99$	$10^{10}R = 0,04479$	$P = 11,99$	$10^{10}R = 0,04479$	$P = 11,99$
$X_m = 70^{km}$	$S = 2,62$	$X_m = 99^{km}$	$S = 1,55$	$X_m = 112^{km}$	$S = 1,28$	$X_m = 112^{km}$	$S = 1,28$	$X_m = 112^{km}$	$S = 1,28$	$X_m = 112^{km}$	$S = 1,28$
$T_m = 152^s$	$\omega_m = 65^{\circ}29'$	$T_m = 179^s$	$\omega_m = 63^{\circ}57'$	$T_m = 189^s$	$\omega_m = 63^{\circ}17'$	$T_m = 189^s$	$\omega_m = 63^{\circ}17'$	$T_m = 189^s$	$\omega_m = 63^{\circ}17'$	$T_m = 189^s$	$\omega_m = 63^{\circ}17'$
$v'_m = 332^m$	$E'_m = 1^{tkm},86$	$v'_m = 416^m$	$E'_m = 5^{tkm},03$	$v'_m = 450^m$	$E'_m = 7^{tkm},11$	$v'_m = 450^m$	$E'_m = 7^{tkm},11$	$v'_m = 450^m$	$E'_m = 7^{tkm},11$	$v'_m = 450^m$	$E'_m = 7^{tkm},11$
$v''_m = 729^m$	$E''_m = 8^{tkm},93$	$v''_m = 851^m$	$E''_m = 21^{tkm},04$	$v''_m = 893^m$	$E''_m = 28^{tkm},05$	$v''_m = 893^m$	$E''_m = 28^{tkm},05$	$v''_m = 893^m$	$E''_m = 28^{tkm},05$	$v''_m = 893^m$	$E''_m = 28^{tkm},05$
$v_m = 800^m$	$E_m = 10^{tkm},78$	$v_m = 949^m$	$E_m = 26^{tkm},07$	$v_m = 999^m$	$E_m = 35^{tkm},05$	$v_m = 999^m$	$E_m = 35^{tkm},05$	$v_m = 999^m$	$E_m = 35^{tkm},05$	$v_m = 999^m$	$E_m = 35^{tkm},05$
$[y_s]_m = 31^{km},0$	$\mathcal{H} = 204$	$[y_s]_m = 41^{km},9$	$\mathcal{H} = 178$	$[y_s]_m = 46^{km},1$	$\mathcal{H} = 169$	$[y_s]_m = 46^{km},1$	$\mathcal{H} = 169$	$[y_s]_m = 46^{km},1$	$\mathcal{H} = 169$	$[y_s]_m = 46^{km},1$	$\mathcal{H} = 169$
$\mathcal{E} = 19,4$	$\mathcal{R} = 3958$	$\mathcal{E} = 36,0$	$\mathcal{R} = 6408$	$\mathcal{E} = 44,3$	$\mathcal{R} = 7487$	$\mathcal{E} = 44,3$	$\mathcal{R} = 7487$	$\mathcal{E} = 44,3$	$\mathcal{R} = 7487$	$\mathcal{E} = 44,3$	$\mathcal{R} = 7487$

Projectiles homogènes coiffés

Projectile hétérogène coiffé

$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,05841$	$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,024490$	$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,017916$
$\tilde{z} = 1,45$	$n\tilde{z} = 0,58$	$\tilde{z} = 1,37$	$n\tilde{z} = 0,55$	$\tilde{z} = 1,34$	$n\tilde{z} = 0,54$
$X'_m = 102^{km}$	$\chi = 0,93$	$X'_m = 137^{km}$	$\chi = 0,91$	$X'_m = 149^{km}$	$\chi = 0,90$
$\omega'_m = 65^{\circ}53'$	$v = 1,26$	$\omega'_m = 61^{\circ}30'$	$v = 1,25$	$\omega'_m = 60^{\circ}47'$	$v = 1,25$
$[v'_1]_m = 418^m$	$[E'_1]_m = 2^{tkm}94$	$[v'_1]_m = 522^m$	$[E'_1]_m = 7^{tkm}92$	$[v'_1]_m = 560^m$	$[E'_1]_m = 11^{tkm}03$
$[v''_1]_m = 852^m$	$[E''_1]_m = 12^{tkm}21$	$[v''_1]_m = 972^m$	$[E''_1]_m = 27^{tkm}45$	$[v''_1]_m = 999^m$	$[E''_1]_m = 35^{tkm}11$
$[v'_1]_m = 949^m$	$[E'_1]_m = 15^{tkm}15$	$[v'_1]_m = 1103^m$	$[E'_1]_m = 35^{tkm}57$	$[v'_1]_m = 1145^m$	$[E'_1]_m = 46^{tkm}14$
$\mathcal{R}' = 27,8$	$\mathcal{R}' = 5671$	$\mathcal{R}' = 49,1$	$\mathcal{R}' = 8740$	$\mathcal{R}' = 58,7$	$\mathcal{R}' = 9920$

§35. Tables comparatives des Canons 520 240 091, 520 240 167 et 520 240 205.

Pour le même lieu que précédemment pour lequel : $z=0^m$ et $\varphi=45^\circ N$ et pour l'angle : $\alpha_m = 51^\circ 50'$, les tables de tir d'un canon de 0^m,520 lançant à la vitesse initiale de 2400 mètres des projectiles pesant 910^{kg}, 1670^{kg} et 2050^{kg}, les premiers étant homogènes et le dernier hétérogène sont :

Canon 520 240 091		Canon 520 240 167		Canon 520 240 205	
Projectiles homogènes ordinaires non coiffés.		Projectiles homogènes ordinaires non coiffés.		Projectile hétérogène non coiffé.	
$\Lambda = 0,000098$	$N = 2298$	$\Lambda = 0,000053$	$N = 2298$	$\Lambda = 0,000044$	$N = 2298$
$\Delta = 1,235$	$\Psi = 0,090$	$\Delta = 1,235$	$\Psi = 0,070$	$\Delta = 1,235$	$\Psi = 0,066$
$10^{10}K = 0,025$	$\rho = 33,84$	$10^{10}K = 0,0105$	$\rho = 14,21$	$10^{10}K = 0,0082$	$\rho = 11,10$
$X'_m = 167^{km}$	$S = 2,41$	$X'_m = 235^{km}$	$S = 1,42$	$X'_m = 256^{km}$	$S = 1,21$
$T'_m = 239^s$	$\omega'_m = 65^{\circ}16'$	$T'_m = 275^s$	$\omega'_m = 63^{\circ}39'$	$T'_m = 322^s$	$\omega'_m = 63^{\circ}05'$
$v'_m = 516^m$	$E'_m = 12^{tkm}36$	$v'_m = 646^m$	$E'_m = 35^{tkm}55$	$v'_m = 690^m$	$E'_m = 49^{tkm}78$
$v''_m = 1121^m$	$E''_m = 58^{tkm}33$	$v''_m = 1305^m$	$E''_m = 145^{tkm}06$	$v''_m = 1359^m$	$E''_m = 193^{tkm}12$
$v'_m = 1234^m$	$E'_m = 70^{tkm}6$	$v'_m = 1456^m$	$E'_m = 180^{tkm}6$	$v'_m = 1524^m$	$E'_m = 245^{tkm}0$
$[y'_1]_m = 75^{tkm}7$	$\mathcal{R}' = 86$	$[y'_1]_m = 98^{tkm}4$	$\mathcal{R}' = 74$	$[y'_1]_m = 105^{tkm}8$	$\mathcal{R}' = 70$
$\mathcal{R}' = 76,8$	$\mathcal{R}' = 6605$	$\mathcal{R}' = 145,7$	$\mathcal{R}' = 10782$	$\mathcal{R}' = 176,4$	$\mathcal{R}' = 12348$
Projectiles homogènes coiffés		Projectiles homogènes coiffés		Projectile hétérogène coiffé.	
$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,01000$	$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,00420$	$n = 0,4$	$10^{10}K' = 0,00328$
$\tilde{z} = 1,44$	$n\tilde{z} = 0,576$	$\tilde{z} = 1,36$	$n\tilde{z} = 0,544$	$\tilde{z} = 1,34$	$n\tilde{z} = 0,536$
$X'_m = 240^{km}$	$\chi = 0,985$	$X'_m = 320^{km}$	$\chi = 0,905$	$X'_m = 345^{km}$	$\chi = 0,895$
$\omega'_m = 63^{\circ}32'$	$v = 1,265$	$\omega'_m = 61^{\circ}12'$	$v = 1,272$	$\omega'_m = 60^{\circ}36'$	$v = 1,274$
$[v'_1]_m = 653^m$	$[E'_1]_m = 19^{tkm}79$	$[v'_1]_m = 821^m$	$[E'_1]_m = 57^{tkm}41$	$[v'_1]_m = 879^m$	$[E'_1]_m = 80^{tkm}78$
$[v''_1]_m = 1310^m$	$[E''_1]_m = 79^{tkm}66$	$[v''_1]_m = 1501^m$	$[E''_1]_m = 191^{tkm}91$	$[v''_1]_m = 1549^m$	$[E''_1]_m = 250^{tkm}88$
$[v'_1]_m = 1464^m$	$[E'_1]_m = 99,4$	$[v'_1]_m = 1711^m$	$[E'_1]_m = 249^{tkm}4$	$[v'_1]_m = 1781^m$	$[E'_1]_m = 331^{tkm}6$
$\mathcal{R}' = 109,2$	$\mathcal{R}' = 9391$	$\mathcal{R}' = 199,8$	$\mathcal{R}' = 14785$	$\mathcal{R}' = 238,5$	$\mathcal{R}' = 16695$

Les Tables mettent bien en évidence les avantages présentés par les projectiles hétérogènes. Ils augmentent sensiblement les effets utiles des coups de canon et les rendements de ces canons.

§36. Tables comparatives des Canons 520 240 167 et 520 240 205 tirant vers l'Ouest en un lieu défini par $z=4000^m$ et $\varphi=0^\circ$. Soit maintenant un canon dont le calibre est de 0^m,520 lançant sous l'angle de portée maximum : $\alpha_m = 51^\circ 50'$, à la vitesse initiale de 2400^m un projectile homogène de 1670^{kg}, puis un projectile hétérogène de 2050^{kg} en un point de l'équateur d'altitude 4000^m et dans la direction de l'Ouest. Par suite :

$$\begin{array}{llll}
 a = 0^m,520 & V = 2400^m & p = 1670^{kg} \text{ puis } 2050^{kg} & \alpha_m = 51^\circ 50' \\
 z = 4000^m & \varphi = 0^\circ & v = 270^\circ & \Delta = 0^{kg},773
 \end{array}$$

Dans le § 163, page 134 de la première Thèse, nous avons indiqué pour v la valeur 1,38 au lieu de la vraie valeur 1,25, il en est résulté pour $[v]_m, [v'']_m, [v]_m, [E]_m, [E'']_m, [E]_m, C$ et R des valeurs inexactes. Dans ce qui va suivre, nous indiquons les vraies valeurs de ces quantités.

Canon 520 240 167 avec projectile homogène — Canon 520 240 205 avec projectile hétérogène —

1° Projectiles non coiffés

Nous avons: $\Lambda = \lambda \frac{g}{P} \sin \gamma = 0,33 \times 0,000162 = 0,000053$
 $\Psi_{45,45}^{\circ} = 0,081$, $\Psi_{51,50,0}^{4000} = 0,081 \times 1,045 \times 0,86 \times 0,667 = 0,0486$
 $M = 5383$, $N = 2691$, $A = 2298$,

il en résulte: $10^{10} R = 0,0045755$

De plus: $V^2 = 5760000$, $V^2 = 331776000000$,
 $KV^2 = 0,0000026355$, $2KV^2 = 0,000005271$,

$\rho = \frac{4KV^2}{S} = 6,1905$,
 $\frac{P}{S} = 170,255$, $0,5 \frac{P}{S} = 85,128$, $0,25 \frac{P}{S} = 42,564$,
 Les éléments du tir sont:

d'où: $S = 0,825$, $X_m = 312844^m$
 $\Phi = 0,4932$, $\Omega = 1,4520$, $\Upsilon = 0,5361$, $\Sigma = 0,3097$

Nous trouvons successivement: $T_m = 311^s,2$,
 $\lg \omega_m = 1,84738$, d'où: $\omega_m = 61^{\circ}34'$
 $v_m' = 795^m$, $v_m'' = 1469^m$, $v_m = 1670^m$,
 $E_m' = 53^{\text{tkm}},80$, $E_m'' = 183^{\text{tkm}},70$, $E_m = 237^{\text{tkm}},51$,
 enfin: $[y_s]_m = 123270^m$,
 $C = 192,7$, $A = 74$, $R = 14260$.

Les éléments correctifs sont:

$\lg \theta = 0,049073$

d'où: $\theta = 2^{\circ}48'$

par suite d'après le § 105: $\partial_1 X_m = 4^{\text{tkm}},7$

puis les formules (388) donnent:

$\partial_2 X_m = 3^{\text{tkm}},6$ et $\partial_2 y = 8^{\text{tkm}},7$

d'où d'après le § 105: $\partial_3 X_m = 5^{\text{tkm}},5$

et comme: $\partial_3 X_m = 1^{\text{tkm}},9$ et $\partial_4 X_m = -5^{\text{tkm}},9$

nous avons en définitive:

$\partial X_m = 4^{\text{tkm}},7 + 3^{\text{tkm}},6 + 5^{\text{tkm}},5 + 1^{\text{tkm}},9 - 5^{\text{tkm}},9 = 9^{\text{tkm}},8$

La portée corrigée est donc:

$X_m \text{ corrigé} = 322^{\text{tkm}},6$

Nous avons: $\Lambda = \lambda \frac{g}{P} \sin \gamma = 0,33 \times 0,000132 = 0,000044$
 $\Psi_{45,45}^{\circ} = 0,077$, $\Psi_{51,50,0}^{4000} = 0,077 \times 1,045 \times 0,86 \times 0,667 = 0,0462$
 $M = 5383$, $N = 2691$, $A = 2298$,

il en résulte: $10^{10} R = 0,003610$

De plus: $V^2 = 5760000$, $V^2 = 331776000000$,
 $KV^2 = 0,0000020793$, $2KV^2 = 0,0000041587$,

$\rho = \frac{4KV^2}{S} = 4,8842$,
 $\frac{P}{S} = 208,996$, $0,5 \frac{P}{S} = 104,498$, $0,25 \frac{P}{S} = 52,249$,
 Les éléments du tir sont:

d'où: $S = 0,698$, $X_m = 335922^m$
 $\Phi = 0,4901$, $\Omega = 1,4118$, $\Upsilon = 0,5630$, $\Sigma = 0,3042$

Nous trouvons successivement: $T_m = 311^s,2$,
 $\lg \omega_m = 1,79623$, d'où: $\omega_m = 60^{\circ}54'$
 $v_m' = 842^m$, $v_m'' = 1513^m$, $v_m = 1732^m$,
 $E_m' = 74^{\text{tkm}},09$, $E_m'' = 239^{\text{tkm}},21$, $E_m = 313^{\text{tkm}},30$,
 enfin: $[y_s]_m = 130013^m$,
 $C = 229,4$, $A = 70$, $R = 16058$.

Les éléments correctifs sont:

$\lg \theta = 0,052726$

d'où: $\theta = 3^{\circ}1'$

par suite d'après le § 105: $\partial_1 X_m = 5^{\text{tkm}},5$

puis les formules (388) donnent:

$\partial_2 X_m = 3^{\text{tkm}},9$ et $\partial_2 y = 9^{\text{tkm}},6$

d'où d'après le § 105: $\partial_3 X_m = 6^{\text{tkm}},1$

et comme: $\partial_3 X_m = 2^{\text{tkm}},7$ et $\partial_4 X_m = -6^{\text{tkm}},3$

nous avons en définitive:

$\partial X_m = 5^{\text{tkm}},5 + 3^{\text{tkm}},9 + 6^{\text{tkm}},1 + 2^{\text{tkm}},7 - 6^{\text{tkm}},3 = 11^{\text{tkm}},9$

La portée corrigée est donc:

$X_m \text{ corrigé} = 347^{\text{tkm}},8$

2° Projectiles coiffés

Supposons: $n = 0,4$

nous avons: $10^{10} R' = 0,0018302$,

puis: $\xi = 1,285$ et $n\xi = 0,514$

Il en résulte: $X_m' = 402^{\text{tkm}},5$

et comme: $S = 0,825$ nous avons:

$\tau = 1,13$, $\chi = 0,95$, $v = 1,25$, $v\chi = 1,188$, $\sigma = 0,92$,

par conséquent: $T_m = 397^s,4$

$\lg \omega_m' = 1,75501$ d'où: $\omega_m' = 60^{\circ}20'$,
 $[v']_m = 994^m$, $[v'']_m = 1745^m$, $[v]_m = 2008^m$,
 $[E']_m = 84^{\text{tkm}},11$, $[E'']_m = 259^{\text{tkm}},21$, $[E]_m = 343^{\text{tkm}},32$,
 $[y_s]_m = 145730^m$

Supposons:

$n = 0,4$

nous avons: $10^{10} R' = 0,0014440$,

puis: $\xi = 1,260$ et $n\xi = 0,504$

Il en résulte: $X_m' = 423^{\text{tkm}},5$

et comme: $S = 0,698$ nous avons:

$\tau = 1,12$, $\chi = 0,945$, $v = 1,23$, $v\chi = 1,162$, $\sigma = 0,92$,

par conséquent: $T_m = 402^s$

$\lg \omega_m' = 1,69744$ d'où: $\omega_m' = 59^{\circ}30'$,
 $[v']_m = 1036^m$, $[v'']_m = 1756^m$, $[v]_m = 2041^m$,
 $[E']_m = 112^{\text{tkm}},16$, $[E'']_m = 323^{\text{tkm}},00$, $[E]_m = 435^{\text{tkm}},13$,
 $[y_s]_m = 150711^m$

$$\mathcal{C}' = 262,7 \quad \mathcal{H} = 74 \quad \mathcal{R}' = 19440.$$

Les éléments correctifs sont:

$$\lg \theta' = 0,06309$$

d'où:

$$\theta' = 3^\circ 36'$$

par suite d'après le § 105:

$$\partial_1 X'_m = 8^{km}, 3$$

puis les formules (388) donnent:

$$\partial_2 X'_m = 7^{km}, 5 \quad \text{et} \quad \partial_2 y = 14^{km}, 3$$

d'où d'après le § 105:

$$\partial_2 X'_m = 9^{km}, 7$$

$$\text{et comme : } \partial_3 X'_m = 2^{km}, 8 \quad \text{et} \quad \partial_4 X'_m = -9^{km}, 2$$

nous avons en définitive:

$$\partial X'_m = 8^{km}, 3 + 7^{km}, 5 + 14^{km}, 3 + 2^{km}, 8 - 9^{km}, 2 = 23^{km}, 7$$

La portée corrigée est donc:

$$X'_m \text{ corrigé} = 425^{km}, 7$$

$$\mathcal{C}' = 303,5 \quad \mathcal{H} = 70 \quad \mathcal{R}' = 21245$$

Les éléments correctifs sont:

$$\lg \theta' = 0,06639$$

d'où:

$$\theta' = 3^\circ 48'$$

par suite d'après le § 105:

$$\partial_1 X'_m = 9^{km}, 3$$

puis les formules (388) donnent:

$$\partial_2 X'_m = 7^{km}, 7 \quad \text{et} \quad \partial_2 y = 15^{km}, 2$$

d'où d'après le § 105:

$$\partial_2 X'_m = 10^{km}$$

$$\text{et comme : } \partial_3 X'_m = 3^{km}, 4 \quad \text{et} \quad \partial_4 X'_m = -10^{km}, 5$$

nous avons en définitive:

$$\partial X'_m = 9^{km}, 3 + 7^{km}, 7 + 15^{km}, 2 + 3^{km}, 4 - 10^{km}, 5 = 25^{km}, 1$$

La portée corrigée est donc:

$$X'_m \text{ corrigé} = 448^{km}, 4$$

Chapitre VII.

Tables de tir générales

§ 37. Exposé. — Dans le présent chapitre nous donnons les valeurs de: X_m , $0,5 E_m$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{R}$ d'une part et de X'_m , $0,5 [E]_m$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{R}'$ d'autre part concernant les divers canons envisagés lors que les projectiles ordinaires ou coiffés sont hétérogènes

Canon de 0^m,200.

$$\alpha_m = 51^\circ 50', \quad z = 0^m$$

$$\varphi = 45^\circ N, \quad \Delta = 1,235$$

Y	N ^o d'ordre	Types des canons	p	$\mathcal{H}$	Projectiles ordinaires					Projectiles coiffés			
					X_m	$0,5 E_m$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{R}$	X'_m	$0,5 [E]_m$	$\mathcal{C}'$	$\mathcal{R}'$	
1	800 ^m	6	200 080 012	$\frac{120}{kg}$	774	24,4	0,67	4,0	3 096	33,4	0,89	5,5	4 257
	"	7	200 080 013	<u>130</u>	759	23,2	0,75	4,3	3 264	34,4	0,99	5,8	4 402
2	1200	13	200 120 012	$\frac{120}{kg}$	568	46,9	1,29	7,8	4 430	66,7	1,80	11,0	6 248
	"	14	200 120 013	<u>130</u>	537	49,1	1,46	8,5	4 735	69,2	2,03	11,9	6 628
3	1600	20	200 160 012	$\frac{120}{kg}$	471	78,2	2,18	13,1	6 170	111,9	3,06	18,6	8 761
	"	21	200 160 013	<u>130</u>	464	82,3	2,48	14,3	6 592	116,9	3,46	20,2	9 312
4	2000	27	200 200 012	$\frac{120}{kg}$	411	114,1	3,18	19,0	7 809	164,3	5,19	29,2	12 001
	"	28	200 200 013	<u>130</u>	403	120,5	3,63	20,9	8 423	172,3	5,89	31,9	12 856
5	2400	34	200 240 012	$\frac{120}{kg}$	370	155,1	4,36	26,0	9 620	224,6	6,11	37,0	13 690
	"	35	200 240 013	<u>130</u>	363	163,0	4,97	28,5	10 346	235,2	6,91	40,4	14 665

Canon de 0^m,240.

$$\alpha_m = 51^\circ 50', \quad z = 0^m$$

$$\varphi = 45^\circ N, \quad \Delta = 1,235^{kg}$$

V	N ^{os} d'ordre	Types des canons	p	$\mathcal{R}$	Projectiles ordinaires				Projectiles coiffés				
					X_m	$0,5 E_m$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{R}$	X'_m	$0,5 [E]_m$	$\mathcal{C}'$	$\mathcal{R}'$	
6	800 ^m	41	240 080 021,5	<u>215</u> ^{kg}	557	26,9 ^{km}	1,5 ^{km}	6,0	3342	36,3 ^{km}	1,7 ^{km}	7,8	4345
	"	42	240 080 023	<u>230</u>	547	27,7	1,5	6,4	3501	37,1	1,9	8,4	4595
7	1200	48	240 120 021,5	<u>215</u>	408	53,0	2,6	11,7	4774	73,2	3,6	16,2	6610
	"	49	240 120 023	<u>230</u>	401	55,0	2,9	12,6	5053	75,4	3,9	17,3	6937
8	1600	55	240 160 021,5	<u>215</u>	340	90,0	4,5	20,1	6834	126,3	6,2	28,0	9520
	"	56	240 160 023	<u>230</u>	335	93,8	5,0	21,7	7270	130,5	6,9	30,0	10050
9	2000	62	240 200 021,5	<u>215</u>	297	131,8	6,6	29,4	8732	187,1	8,9	40,8	12118
	"	63	240 200 023	<u>230</u>	292	137,8	7,3	31,7	9256	194,4	9,8	43,7	12760
10	2400	69	240 240 021,5	<u>215</u>	267	179,1	8,9	39,9	10752	254,2	12,5	56,3	15032
	"	70	240 240 023	<u>230</u>	262	186,5	9,9	43,0	11266	262,2	13,8	60,2	15772

Canon de 0^m,280.

$$\alpha_m = 51^\circ 50', \quad z = 0^m$$

$$\varphi = 45^\circ N, \quad \Delta = 1,235^{kg}$$

V	N ^{os} d'ordre	Types des canons	p	$\mathcal{R}$	Projectiles ordinaires				Projectiles coiffés				
					X_m	$0,5 E_m$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{R}$	X'_m	$0,5 [E]_m$	$\mathcal{C}'$	$\mathcal{R}'$	
11	800 ^m	76	280 080 032,5	<u>325</u> ^{kg}	430	28 ^{km}	2,1 ^{km}	7,7	3311	38 ^{km}	2,8 ^{km}	10,3	4429
	"	77	280 080 035	<u>350</u>	422	29	2,3	8,2	3460	39	3,1	11,0	4642
12	1200	83	280 120 032,5	<u>325</u>	316	56	4,2	15,3	4835	77	5,7	20,8	6573
	"	84	280 120 035	<u>350</u>	310	58	4,7	16,5	5115	79	6,2	22,2	6882
13	1600	90	280 160 032,5	<u>325</u>	263	96	7,2	26,3	6917	133	9,8	36,1	9494
	"	91	280 160 035	<u>350</u>	258	101	8,1	28,6	7379	138	10,9	38,8	10010
14	2000	97	280 200 032,5	<u>325</u>	229	141	10,6	38,7	8862	197	14,9	54,2	12412
	"	98	280 200 035	<u>350</u>	225	148	11,9	42,0	9450	205	16,6	58,4	13140
15	2400	104	280 240 032,5	<u>325</u>	206	190	14,4	52,2	10753	270	20,1	73,7	15182
	"	105	280 240 035	<u>350</u>	202	198	16,1	56,5	11413	280	22,5	79,4	16039

Canon de 0^m,320.

$$\alpha_m = 51^\circ 50', \quad z = 0^m$$

$$\varphi = 45^\circ N, \quad \Delta = 1^{\text{kg}} 235$$

V	N ^{os} d'ordre	Types des canons	p	R	Projectiles ordinaires				Projectiles coiffés			
					X _m	0,5 E _m	E	R	X' _m	0,5 [E] _m	E'	R'
16	800 ^m	111 320 080 046	<u>460</u> ^{kg}	345	29 ^{km}	3,0 ^{lkm}	9,3	3209	39 ^{km}	4,1 ^{lkm}	12,6	4347
	"	112 320 080 050	<u>500</u>	339	30	3,4	10,1	3424	40	4,6	13,6	4610
17	1200	118 320 120 046	<u>460</u>	255	59	6,2	19,1	4871	79	8,2	25,4	6477
	"	119 320 120 050	<u>500</u>	251	61	7,0	20,7	5196	82	9,2	27,4	6877
18	1600	125 320 160 046	<u>460</u>	211	101	10,7	32,8	6921	138	14,7	45,1	9516
	"	126 320 160 050	<u>500</u>	207	106	12,2	35,9	7431	144	16,7	49,0	10143
19	2000	132 320 200 046	<u>460</u>	184	148	15,9	48,5	8924	204	20,6	64,9	11942
	"	133 320 200 050	<u>500</u>	180	155	18,2	53,1	9558	212	23,4	70,4	12672
20	2400	139 320 240 046	<u>460</u>	166	200	21,0	64,8	10757	281	28,9	90,1	14957
	"	140 320 240 050	<u>500</u>	163	208	23,8	70,4	11475	289	32,4	96,8	15778

Canon de 0^m,360.

$$\alpha_m = 51^\circ 50', \quad z = 0^m$$

$$\varphi = 45^\circ N, \quad \Delta = 1^{\text{kg}} 235$$

V	N ^{os} d'ordre	Types des canons	p	R	Projectiles ordinaires				Projectiles coiffés			
					X _m	0,5 E _m	E	R	X' _m	0,5 [E] _m	E'	R'
21	800 ^m	146 360 080 063	<u>630</u> ^{kg}	284	30 ^{km}	4,3 ^{lkm}	11,4	3238	40 ^{km}	5,7 ^{lkm}	15,1	4288
	"	147 360 080 069	<u>690</u>	278	31	4,9	12,4	3447	41	6,4	16,3	4531
22	1200	153 360 120 063	<u>630</u>	209	61	8,8	23,2	4849	82	11,2	30,4	6354
	"	154 360 120 069	<u>690</u>	204	64	10,1	25,4	5182	86	12,7	33,0	6732
23	1600	160 360 160 063	<u>630</u>	173	106	15,3	40,2	6955	143	20,3	53,9	9325
	"	161 360 160 069	<u>690</u>	169	112	17,5	44,3	7487	149	23,1	58,7	9920
24	2000	167 360 200 063	<u>630</u>	151	158	22,8	60,1	9075	216	30,8	81,8	12372
	"	168 360 200 069	<u>690</u>	148	168	26,6	66,8	9885	227	35,5	89,9	13305
25	2400	174 360 240 063	<u>630</u>	136	208	30,2	79,3	10785	289	40,2	107,8	14661
	"	175 360 240 069	<u>690</u>	133	217	35,1	87,3	11611	298	45,6	116,6	15508

Canon de 0^m400

$$\varphi = 51^{\circ}50', \quad z = 0^m$$

$$\varphi = 45^{\circ}N, \quad \Delta = 1^{\text{kg}} 235$$

V	N ^o d'ordre	Types des canons	p	$\mathcal{H}$	Projectiles ordinaires				Projectiles coiffés				
					X_m	$0,5 E_m$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{R}$	X'_m	$0,5 [E]_m$	$\mathcal{C}'$	$\mathcal{R}'$	
26	800 ^m	181	400 080 084,5	<u>845</u> ^{kg}	237	31 ^{km}	6 ^{tkm} ,0	13,7	3246	41 ^{tkm}	7,6	17,6	4171
	"	182	400 080 093	<u>930</u>	231	32	6,8	14,8	3419	42	8,6	19,0	4389
27	1200	188	400 120 084,5	<u>845</u>	174	64	12,3	28,1	4889	86	15,7	36,7	6386
	"	189	400 120 093	<u>930</u>	170	67	14,2	30,9	5253	89	17,7	39,8	6766
28	1600	195	400 160 084,5	<u>845</u>	145	110	21,3	48,5	7033	148	28,1	64,5	9353
	"	196	400 160 093	<u>930</u>	142	116	24,5	53,5	7597	154	31,9	70,2	9968
29	2000	202	400 200 084,5	<u>845</u>	126	163	31,5	71,7	9034	222	42,0	96,4	12146
	"	203	400 200 093	<u>930</u>	123	172	36,6	79,3	9754	230	48,5	105,6	12989
30	2400	209	400 240 084,5	<u>845</u>	114	215	42,0	95,3	10864	298	57,1	130,4	14866
	"	210	400 240 093	<u>930</u>	111	226	48,4	104,7	11622	309	65,5	142,3	15784

Canon de 0^m440.

$$\varphi = 51^{\circ}50', \quad z = 0^m$$

$$\varphi = 45^{\circ}N, \quad \Delta = 1^{\text{kg}} 235$$

V	N ^o d'ordre	Types des canons	p	$\mathcal{H}$	Projectiles ordinaires					Projectiles coiffés			
					X_m	$0,5 E_m$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{R}$	X'_m	$0,5 [E]_m$	$\mathcal{C}'$	$\mathcal{R}'$	
31	800 ^m	216	440 080 111,5	<u>1115</u> ^{kg}	201	32 ^{km}	8,3 ^{tkm}	16,3	3276	42 ^{tkm}	11,2	21,8	4382
	"	217	440 080 123	<u>1230</u>	195	34	9,5	17,9	3491	44	12,9	23,8	4644
32	1200	223	440 120 111,5	<u>1115</u>	147	67	17,1	33,8	4969	88	22,6	44,6	6556
	"	224	440 120 123	<u>1230</u>	143	71	19,9	37,6	5377	93	26,1	48,8	6978
33	1600	230	440 160 111,5	<u>1115</u>	122	116	29,3	58,3	7113	156	39,2	78,2	9540
	"	231	440 160 123	<u>1230</u>	118	123	33,6	64,3	7587	164	45,0	85,9	10136
34	2000	237	440 200 111,5	<u>1115</u>	107	171	43,7	86,4	9245	231	59,4	117,0	12519
	"	238	440 200 123	<u>1230</u>	104	181	50,7	95,8	9963	241	68,5	128,5	13364
35	2400	244	440 240 111,5	<u>1115</u>	96	230	58,8	116,3	11165	314	79,5	158,0	15168
	"	245	440 240 123	<u>1230</u>	93	243	67,9	128,5	11951	328	91,0	172,8	16070

Cannon de 0,480.

 $\alpha = 51^{\circ}50'$, $z = 0^m$ $\varphi = 45^{\circ}N$, $\Delta = 1,235^{kg}$

V	N ^o d'ordre	Types des canons	p	$\mathcal{H}$	Projectiles ordinaires				Projectiles coiffés			
					X_m	$0,5 E_m$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{H}$	X'_m	$0,5[E]_m$	$\mathcal{C}'$	$\mathcal{H}'$
36	800 ^m	251 480 080 145	<u>1450</u> ^{kg}	173	33 ^{km}	11,0 ^{tkm}	19,0	3 287	43 ^{km}	15,1 ^{tkm}	25,4	4 394
	252	480 080 160	<u>1600</u>	169	34	12,5	20,7	3 498	44	17,2	27,5	4 648
37	1200	258 480 120 145	<u>1450</u>	126	70	22,9	40,0	5 040	92	30,1	52,5	6 615
	259	480 120 160	<u>1600</u>	123	73	26,4	44,0	5 412	95	34,4	57,5	7 048
38	1600	265 480 160 145	<u>1450</u>	106	122	39,9	69,8	7 399	162	53,4	93,0	9 858
	266	480 160 160	<u>1600</u>	103	128	46,2	76,9	7 921	169	61,4	101,9	10 496
39	2000	272 480 200 145	<u>1450</u>	92	178	59,5	102,9	9 467	238	78,2	136,4	12 549
	273	480 200 160	<u>1600</u>	90	188	69,0	113,9	10 251	249	89,8	149,4	13 446
40	2400	279 480 240 145	<u>1450</u>	83	237	78,5	136,6	11 338	322	106,3	185,0	15 355
	280	480 240 160	<u>1600</u>	81	248	90,2	149,6	12 118	335	121,4	201,5	16 322

Cannon de 0,520

 $\alpha = 51^{\circ}50'$, $z = 0^m$ $\varphi = 45^{\circ}N$, $\Delta = 1,235^{kg}$

V	N ^o d'ordre	Types des canons	p	$\mathcal{H}$	Projectiles ordinaires				Projectiles coiffés			
					X_m	$0,5 E_m$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{H}$	X'_m	$0,5[E]_m$	$\mathcal{C}'$	$\mathcal{H}'$
41	800 ^m	286 520 080 186	<u>1860</u> ^{kg}	153	34 ^{km}	14,5 ^{tkm}	22,4	3 427	44 ^{km}	18,9 ^{tkm}	29,0	4 437
	287	520 080 205	<u>2050</u>	150	36	16,7	24,5	3 675	46	21,6	31,5	4 725
42	1200	293 520 120 186	<u>1860</u>	110	73	30,5	47,2	5 192	94	39,7	61,2	6 732
	294	520 120 205	<u>2050</u>	108	76	35,2	51,8	5 594	98	45,4	66,7	7 204
43	1600	300 520 160 186	<u>1860</u>	91	127	53,7	82,6	7 517	166	70,2	108,0	9 828
	301	520 160 205	<u>2050</u>	89	135	61,5	90,4	8 046	172	79,2	116,8	10 395
44	2000	307 520 200 186	<u>1860</u>	80	187	79,4	121,8	9 744	249	105,7	162,1	12 968
	308	520 200 205	<u>2050</u>	78	196	91,7	134,1	10 460	259	120,9	177,6	13 853
45	2400	314 520 240 186	<u>1860</u>	72	247	105,8	161,7	11 642	333	145,2	219,9	15 833
	315	520 240 205	<u>2050</u>	70	256	121,5	176,4	12 348	343	163,8	238,5	16 695

CONCLUSIONS

Il nous est maintenant possible d'expliquer les phénomènes qui ont accompagné les expériences du Creusot et que nous avons relatées dans l'avant-propos de cette thèse.

Quand le projectile préalablement lesté avec du plomb venait frapper la plaque de blindage, l'énergie cinétique qu'il possédait à ce moment était en grande partie transformée en énergie calorifique. La température de l'obus s'élevait brusquement de plusieurs centaines de degrés.

Mais les coefficients de dilatation de l'acier et du plomb d'une part et les chaleurs spécifiques de ces métaux d'autre part sont tels que le volume extérieur du plomb, par suite de cette élévation de température devenait supérieur au volume intérieur de l'enveloppe d'acier. Il résultait de ce fait un développement considérable de l'énergie cinétique interne capable de provoquer avec violence la rupture de l'obus.

Un tel projectile peut donc exploser sans explosif et il est éminemment incendiaire puisqu'il répand autour de lui du plomb fondu porté à une très haute température.

De plus un projectile hétérogène ayant à volume égal une masse supérieure à celle d'un projectile homogène, il provoque une augmentation sensible de portée et d'énergie cinétique au point de chute. L'effet utile d'un coup de canon et le rendement de ce canon sont par suite eux aussi notablement augmentés.

Enfin un tel projectile hétérogène n'ayant pas besoin de fusée est d'une fabrication simple et rapide et comme il ne renferme aucun explosif il n'y a pas à craindre l'explosion d'un dépôt de munitions.

Telles sont les conclusions auxquelles nous à conduit notre étude.

Lu et approuvé :

Les Membres du Jury,

R. LE VAVASSEUR. H. DULAC.

JEAN MASCART.

Vu et approuvé :

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

C. DEPÉRET.

Vu et permis d'imprimer :

LYON, LE 5 MAI 1919.

Pour le Recteur et par délégation :

Le Vice-Président du Conseil de l'Université,

C. DEPÉRET.

Errata.

Pages	
22	Figure 6 : <u>ajouter</u> la lettre R à l'extrémité du vecteur en pointillé.
25	Figure 11 : <u>ajouter</u> la lettre m , au pied de la perpendiculaire abaissée de M_1 sur Ox .
27	Ligne 13 en remontant, <u>lire</u> : $\frac{w}{\cos \psi} \left[\frac{c F(w)}{g} + \sin \psi \right]$, <u>au lieu de</u> : $\frac{w}{\cos \psi} \left[\frac{c F(w)}{g} - \sin \psi \right]$.
28	Figure 13: <u>écrire</u> la lettre R dans le prolongement de la tangente TM .
31	Ligne 7 en descendant, <u>lire</u> : $+ \frac{4-n}{6} c^2 V^{2n-4} X^2 + \dots$, <u>au lieu de</u> : $+ \frac{4-n}{6} c V^{2n-4} X^2 + \dots$.
44	Ligne 7 en descendant, <u>lire</u> : $L \left(\frac{V^2 \cos^2 \alpha - 2 R \theta x}{V^2 \cos^2 \alpha} \right)$, <u>au lieu de</u> : $L \left(\frac{V^2 \cos^2 \alpha - 2 R \theta x}{V^2 \cos^2 \alpha} \right)$.
82	Ligne 5 en descendant, <u>lire</u> : $v_m'' = 891 \times 0,90330 = 805''$, <u>au lieu de</u> : $v'' = 891 \times 0,90330 = 805''$.
88	Ligne 11 en descendant, <u>lire</u> : jusqu'à 360 kilomètres, <u>au lieu de</u> : jusqu'à 36 kilomètres.
104	Ligne 7 en descendant, <u>lire</u> : Applications, <u>au lieu de</u> : Application.
105	Figure 31 <u>lire</u> la lettre B au lieu de la lettre R , celle-ci désignant le rayon de la Terre.
134	Ligne 10 en remontant, <u>lire</u> : $10^{10} K^2$, <u>au lieu de</u> : K^2 .
134	Ligne 6 en remontant, <u>lire</u> : $v = 1,25$, <u>au lieu de</u> : $v = 1,38$.
134	Ligne 3 en remontant, <u>lire</u> : $[v']_m = 994''$, $[v'']_m = 1745''$ et $[v]_m = 2008''$, <u>au lieu de</u> : $[v']_m = 1097''$, $[v'']_m = 1926''$ et $[v]_m = 2216''$.
134	Ligne 2 en remontant, <u>lire</u> : $[E']_m = 84^{km}, 11$, $[E'']_m = 259^{km}, 21$ et $[E]_m = 343^{km}, 32$, <u>au lieu de</u> : $[E']_m = 102^{km}, 44$, $[E'']_m = 315^{km}, 78$ et $[E]_m = 418^{km}, 22$.
135	Ligne 1 en descendant, <u>lire</u> : $C' = 262,7$ et $C'' = 19440$, <u>au lieu de</u> : $C' = 289,9$ et $C'' = 21453$.
135	Ligne 9 en descendant, <u>lire</u> : $\Delta X_m^2 = 8^{km}, 3 + 7^{km}, 5 + 14^{km}, 3 + 2^{km}, 8 - 9^{km}, 2 = 23^{km}, 7$, <u>au lieu de</u> : $\Delta X_m^2 = 8^{km}, 3 + 7^{km}, 5 + 14^{km}, 3 + 2^{km}, 8 + 9^{km}, 2 = 23^{km}, 7$.
145	Ligne 22 en remontant, <u>lire</u> : des isoplèthes (α) et (β), <u>au lieu de</u> : des isoplèthe (α) et (β).
163	Ligne 21 en descendant, <u>lire</u> : $-\frac{1}{2} S_{xy} - \frac{1}{2} \frac{dS_{xy}}{dy} dy = 0$, <u>au lieu de</u> : $-\frac{1}{2} S_{xy} - \frac{dS_{xy}}{dy} dy = 0$.
180	Ligne 3 en remontant, <u>lire</u> : Or, si le plomb subissait une dilatation égale à: <u>au lieu de</u> : et tout se passe comme si le plomb était astreint à une dilatation de:
180	Ligne 1 en remontant, <u>lire</u> : correspondant à une élévation τ de température, nous aurions: <u>au lieu de</u> : si τ désigne l'élévation correspondante de température, nous pouvons écrire:
28	Lignes 7 en remontant, <u>lire</u> : $\frac{dx}{dt} = -R'' \frac{dx}{ds}$, <u>au lieu de</u> : $\frac{dx}{dt} = -R \frac{dx}{ds}$, et ajouter: R'' étant l'accélération que la résistance de l'air R fait perdre au mobile.
29	Lignes 7 et 8 en descendant, <u>lire</u> : R'' , <u>au lieu de</u> : R .
103	Ligne 14 en remontant, <u>lire</u> : $V^2 = \frac{g^2 R^2 \cos^2 \varphi}{R \cos \varphi} = R g^2 \cos \varphi$, <u>au lieu de</u> : $V^2 = \frac{g^2 R^2 \cos \varphi}{R \cos \varphi} = R g^2 \cos \varphi$.
163	Dernières lignes, <u>lire</u> : $\frac{dR_x}{dx} + \frac{dS_{xy}}{dy} + \frac{dS_{xz}}{dz} + X = 0$, <u>au lieu de</u> : $\frac{dR_x}{dx} + \frac{dS_{xy}}{dy} + \frac{dS_{xz}}{dz} = 0$, $\frac{dS_{xy}}{dx} + \frac{dR_y}{dy} + \frac{dS_{yz}}{dz} + Y = 0$, $\frac{dS_{xy}}{dx} + \frac{dR_y}{dy} + \frac{dS_{yz}}{dz} = 0$, $\frac{dS_{xz}}{dx} + \frac{dS_{yz}}{dy} + \frac{dR_z}{dz} + Z = 0$. $\frac{dS_{xz}}{dx} + \frac{dS_{yz}}{dy} + \frac{dR_z}{dz} = 0$.
176	Lignes 5 et 7 en descendant, <u>lire</u> : $\frac{\Delta dx}{dx}$, <u>au lieu de</u> : $\frac{\Delta dx}{x}$.
184	Ligne 1 en haut, <u>lire</u> : $(R_r dx + x dR_r) dq =$, <u>au lieu de</u> : $(R_r dx - x dR_r) dq =$.
184	Ligne 14 en remontant, <u>lire</u> : $\frac{d^2 u}{dx^2} =$, <u>au lieu de</u> : $\frac{d^2 u}{dt^2} =$.
186	Ligne 6 en remontant, <u>lire</u> : $\frac{d^2 u}{dx^2} =$, <u>au lieu de</u> : $\frac{d^2 u}{dt^2} =$.

Liste des Travaux scientifiques de l'auteur

Note sur le développement de l'ellipse et un nouveau tracé de cette courbe au moyen d'arc de cercles osculateurs. Paris. 1887.

Etude sur les efforts développés par le roulis et le tangage dans les tourelles cuirassées et excentrées du "Brennus". Le Creusot. 1888.

Théorie nouvelle des rayures dans les canons. Le Creusot. 1888.

Note sur le tracé de la parabole. Le Creusot. 1888.

Note sur les effets de la poudre en vase clos. Le Creusot. 1888.

Etude sur l'influence de la courbure de la Terre sur la portée d'un canon. Le Creusot. 1888.

Etude sur l'influence de la rotation de la Terre sur les écarts du tir. Le Creusot. 1888.

Note sur la théorie des nombres. Le Creusot. 1889.

Projet d'un pont métallique sur la Manche, en collaboration avec M.M. Duplax, ingénieur, professeur à l'Ecole centrale et Bernoldin, ingénieur. E.C.P. Châlon-sur-Saône. 1889.

Note sur la répartition des efforts dans les voûtes biaisées en maçonnerie. Void. 1889.

Complément à la note précédente. Void. 1889.

Note sur le calcul de la poussée dans une voûte en maçonnerie en arc de cercle supposée monolithique. Void. 1889.

Note sur le potentiel de deux ellipsoïdes. Châlon-sur-Saône. 1889.

Note sur les caractéristiques et les constantes relatives aux poudres brunes dans les formules de Sarrau. Le Creusot. 1889.

Mémoire sur le calcul des Tables de tir. Le Creusot. 1889.

Note sur la flexion des prismes. Le Creusot. 1889.

Note sur le problème de l'anamorphose. Le Creusot. 1889.

Etude d'un pont roulant de 60 tonnes. Le Creusot. 1889.

Essai d'un traité d'harmonie mathématique. Le Creusot. 1890.

Note sur la formule destinée au calcul du coefficient balistique $10^6 R$. Le Creusot. 1891.

Balistique analytique. 2 volumes. Le Creusot. 1891.

Mémoire relatif aux effets du tir sur les différentes parties d'un affût. Le Creusot. 1892.

Cours d'artillerie. 1 volume. Le Creusot. 1892.

Tables balistiques. 2 volumes. Le Creusot. 1892.

Note sur l'emploi des fonctions elliptiques en Balistique. Le Creusot. 1893.

Biographie de Cauchy. Paris. Maison de la Bonne Presse. 1894.

Mémoire sur la détermination des freins destinés à modérer le recul des affûts. Application au canon de campagne de 75^{mm} à tir rapide, modèle 1894; aux canons de 270^{mm} et 300^{mm} du "Charles Martel" et aux canons des coupoles cuirassées belges. Le Creusot. 1894.

Avant-projet du Canal des Deux-Mers. Le Creusot. 1894.

Comptes rendus des essais de plaques de blindage faits au polygone du Creusot avec des canons de différents calibres de 1888 à 1894.

Tables de tir:

du canon de montagne de 65^{mm}, modèle 1889;

du canon de campagne de 75^{mm} à tir rapide, modèle 1894;

du canon de 140^{mm}, modèle 1881;

du canon de 155^{mm}, long;

du canon de 160^{mm}, modèle 1881 (lourd), n° 1;

du canon de 234^{mm} long;
 du canon de côte de 240^{mm} destiné au gouvernement chinois;
 du canon de 267^{mm} destiné au Chili;
 du canon de 270^{mm};
 du canon de 280^{mm} long;
 du canon de 300^{mm};
 calculées au Creusot de 1889 à 1894.

Grands abaques utilisés pour l'établissement rapide des Tables de tir des canons de tout calibre.
 Le Creusot. 1894.

Recueil de problèmes d'analyse mathématique et de mécanique rationnelle. Dijon. 1895.

Calculs astronomiques. Dijon. 1895.

Recueil de problèmes de physique pour la licence. Dijon. 1896.

Notes sur les "Leçons nouvelles d'Analyse infinitésimale", de Méray. Cosmos. Dijon. 1895-1898

Le Canal des Deux-Mers. Refutation du rapport de la Commission extraparlamentaire nommée par décret du 21 septembre 1894. Paris. Paul Dupont. 1897

Biographie d'Arago. Paris. Maison de la Bonne Presse. 1898

Mémoire sur les appareils producteurs de gaz acétylène. Lumbres. 1900.

Projet définitif du Canal maritime entre l'Océan et la Méditerranée. Paris. Kugelmann. 1901.

Note sur l'industrie du ciment. Paris. Marechal et Mouturier. 1902.

L'acétylène. Théorie et applications. Paris. Gauthier-Villars. 1903

Considérations nouvelles sur les appareils producteurs de gaz acétylène:

I. Appareils destinés aux installations isolées de petite et moyenne importances. Paris. Gauthier-Villars. 1903.

II. Appareils destinés aux stations centrales de grande importance. Paris. Gauthier-Villars. 1903.

Le ciment armé et ses applications. Paris. Gauthier-Villars. 1903.

Les matériaux artificiels. Paris. Gauthier-Villars. 1903.

La Balistique graphique et son application dans le calcul des Tables de tir. Paris. Gauthier-Villars. 1904.

Abaques de Balistique. Paris. Gauthier-Villars. 1904.

Note sur l'usine à ciment portland de Lumbres. Lumbres. 1904

L'Autoloc, système de blocage automatique et instantané. Sa théorie mathématique. Paris. Génie civil. 1906.

Mémoire sur un nouveau tarif à appliquer dans l'assurance sur la vie sur deux têtes accompagnée d'abaques. Lyon. 1906.

Mémoire sur la résistance du pilori Simplex en ciment armé. Lyon. 1908.

Le Ciment armé et ses applications. 2^{ème} édition. Paris. Gauthier-Villars. 1911.

Cours d'Arithmétique théorique et pratique à l'usage des candidats aux divers brevets, au baccalauréat et aux écoles spéciales du gouvernement. Lyon. Jullien. 1912

Précis d'Arithmétique à l'usage des candidats au brevet supérieur. Lyon. Jullien. 1912.

Éléments d'Arithmétique à l'usage des candidats au brevet élémentaire. Lyon. Jullien. 1913.

Précis d'Algèbre à l'usage des candidats au baccalauréat, séries A et B. Lyon. Jullien. 1914

Précis de Géométrie à l'usage des candidats au baccalauréat, séries A et B. Lyon. Jullien. 1914.

Mémoire sur la Balistique des canons de très gros calibre déposé au Ministère des Inventions concernant la Défense Nationale. Lyon. 1916.

Fin

Table des matières.

Université de Lyon Faculté des sciences.

Première Thèse

"Contribution à l'étude balistique des canons de gros calibre et à très longues portées."

Avant-propos.

Historique sommaire de la Balistique.

Définitions - Des notations adoptées - Des unités choisies.

Chapitre 1^{er} - Problème balistique général.

Première Partie — Problème balistique principal.

Chapitre II - Mouvement des projectiles dans le vide.

Chapitre III - De la résistance de l'air.

Chapitre IV - Mouvement des projectiles dans l'air - Propriétés générales des trajectoires dans l'air.

Chapitre V - Des diverses formules résolvant le problème de Balistique principal.

Chapitre VI - De la trajectoire décrite par un projectile lancé par un canon de gros calibre et à très longues portées.

Chapitre VII - Du paramètre K .

Chapitre VIII - Etude du paramètre de forme Λ .

Chapitre IX - Limites entre lesquelles varie le paramètre K - Angle de plus grande portée.

Chapitre X - Etude de la fonction N .

Chapitre XI - De la réfraction atmosphérique - Théorie de Laplace.

Chapitre XII - Etude de la fonction E .

Chapitre XIII - Etude de la fonction perturbatrice Ψ .

Chapitre XIV - Angle de portée maximum.

Chapitre XV - Calcul des éléments essentiels du tir.

Chapitre XVI - Calcul des éléments accessoires du tir.

Chapitre XVII - Calcul des éléments complémentaires du tir.

Chapitre XVIII - Récapitulation.

Deuxième Partie — Problèmes balistiques secondaires.

Chapitre XIX - Des corrections à apporter provenant de la courbure et de la rotation de la Terre.

Chapitre XX - Des corrections à apporter aux éléments du tir provenant de la variation de la gravité.

Chapitre XXI - De la dérivation.

Chapitre XXII - De la variation des éléments du tir.

Chapitre XXIII - Influence de la coiffe sur les divers éléments du tir.

Troisième Partie — De l'établissement des Tables de tir.

Chapitre XXIV - Etablissement des Tables de tir spéciales.

Chapitre XXV - Tables de tir générales.

Chapitre XXVI - Abaques.

Conclusions.

Pages
V

XI

1

6

9

12

17

21

28

36

38

39

43

45

49

56

62

75

77

80

83

84

87

96

108

113

116

126

135

145

149

Deuxième Thèse

"De l'énergétique d'un nouveau type de projectile hétérogène."

	Pages.
Avant - propos.	155
Historique.	157
Des notations et unités adoptées.	158
<u>Chapitre 1^{er}</u> — Généralités sur les forces intérieures ou actions moléculaires.	159
<u>Chapitre II</u> — De l'élasticité — Loi de Hooke.	172
<u>Chapitre III</u> — Energie cinétique au point de chute d'un projectile hétérogène.	180
<u>Chapitre IV</u> — Résistance des enveloppes à parois épaisses.	183
<u>Chapitre V</u> — Applications numériques.	188
<u>Chapitre VI</u> — Tables de tir spéciales.	192
<u>Chapitre VII</u> — Tables de tir générales.	196
Conclusions.	201
Errata.	202
Liste des travaux scientifiques de l'auteur.	203
Table des matières.	205

FIN

1. 10. 19.

Lyon, Le 1^{er} Octobre 1919.

